La función zeta de Riemann

antes de Riemann

·) la serie harmónica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge

·) Pietro Mengoli, el problema de Basilea (1644)

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = ?????$$

la serie converge muy lentamente

$$\simeq 1,644934\ldots$$

·) Euler (1740): $\frac{\pi^2}{6}$ y en gral,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} B_{2k} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} \pi^{2k}$$

·) Bernoulli (1713):

$\boxed{B_0 = 1}$ $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$,

$B_6 = \frac{1}{42}$, $B_7 = 0$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_9 = 0$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, ...

·) Faulhaber (1631) $\boxed{\sum_{0\leq i\leq k} \binom{k+1}{i} B_i = k+1}$

$$\sum_{1\leq i\leq n} i^k = \frac{1}{k+1} \sum_{0\leq i\leq k} \binom{k+1}{i} B_i \, n^{k+1-i}$$

Faulhaber tenía estas fórmulas para ciertos k.

Sumas de potencias infinitas $\longleftrightarrow$ finitas

§ La función zeta de Riemann

·) Riemann (1859) para $s \in \mathbb{C}$

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} \qquad (\mathrm{Re}\ s > 1)$$

·) Euler (1744) $\displaystyle \zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$.

·) Prolongación meromorfa a todo $\mathbb{C}$ con un polo simple en $s = 1$.

·) Ecuación funcional

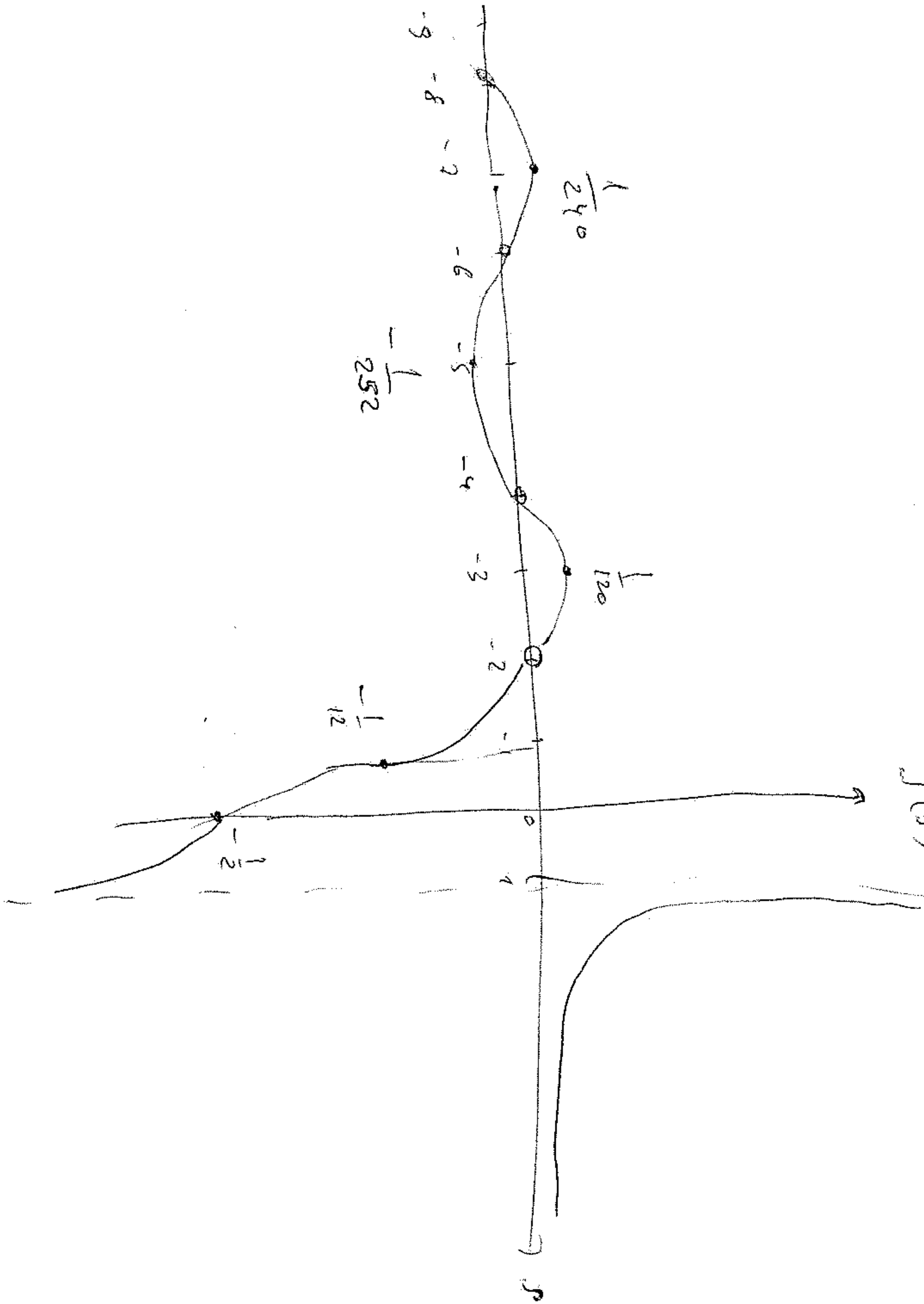
$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)\,\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s).$$

·) Ceros simples "triviales" en $s = -2, -4, -6, \ldots$

·) Hipótesis: otros ceros tienen $\mathrm{Re}\ s = \frac{1}{2}$.

·) El cálculo de Euler corresponde a

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$


-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
$\frac{1}{240}$
$-\frac{1}{252}$
$\frac{1}{120}$
$-\frac{1}{12}$
$-\frac{1}{2}$
$y(s)$
s

ζ la ζ de Riemann en los enteros positivos impares

•) Apéry, 1977: $\zeta(3) \notin \mathbb{Q}$.

•) Rivoal, 2000: infinitud de irracionales entre $\zeta(2k+1)$

•) Zudilin, 2001: por lo menos uno entre $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ es irracional

•) Conjetura (!) los $\zeta(2k+1)$ son trascendentes y algebraicamente independientes entre sí

§ la función zeta de Dedekind

•) $F/\mathbb{Q}$ – campo de números
$\mathcal{O}_F$ – el anillo de enteros.

•) Dedekind (1863, apéndice en el libro de Dirichlet de la teoría de números)

$$\zeta_F(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F \\ \mathfrak{a} \neq 0}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_F} \frac{1}{1 - N(\mathfrak{m})^{-s}}$$

$(\operatorname{Re} s > 1)$

•) Nota: $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(s)$

•) Hecke (1917): ~~continua~~ prolongación meromorfa con un polo simple en $s = 1$.

La ecuación funcional

$$\zeta_F(1-s) = |d_F|^{s-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\pi s}{2}\right)^{r_1+r_2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi s}{2}\right)^{r_2} \cdot \left(2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)\right)^d \zeta_F(s)$$

definir r_1, r_2. $r_1 + 2r_2 = d$

Los ceros (triviales):

s:	0	-1	-2	-3	-4	-5	...
orden:	r_1+r_2-1	r_2	r_1+r_2	r_2	r_1+r_2	r_2	...

La fórmula del número de clases

·) Dirichlet (1838)

Gauss (1801)

polo en $s=1$ $\quad \lim_{s\to 1} (s-1)\zeta_F(s) = \dfrac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\cdot \#\mathcal{C}\ell(F)}{\#\mu_F\cdot\sqrt{|d_F|}} R_F.$

$\updownarrow$

cero en $s=0$ $\quad \lim_{s\to 0} s^{-(r_1+r_2-1)}\zeta_F(s) = -\dfrac{\#\mathcal{C}\ell(F)}{\#\mu_F} R_F$

·) Nota si F es totalmente real ($r_2=0$) entonces $\zeta_F(-n)\neq 0$ para n impar.

·) Teorema de Siegel-Klingen (1961)

$\zeta_F(-n) \in \mathbb{Q}.$

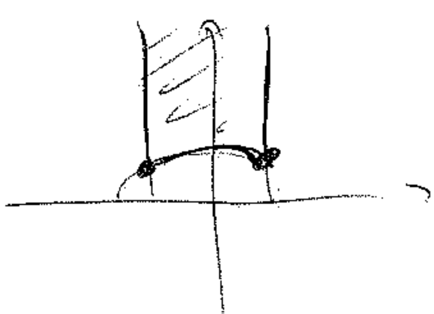
•) Harder (1971)

$$\chi\left(Sp_{2n}(\mathcal{O}_F)\right) = \frac{1}{2^{n(d-n)}} \prod_{1 \le i \le n} \zeta_F(1-2n).$$

Ejemplo $F = \mathbb{Q}$, $n = 1$, $Sp_2 = Sl_2$

$$\chi(SL_2(\mathbb{Z})) = -\frac{1}{12} = -\frac{B_2}{2} = \zeta(-1)$$

la característica de Euler de la orbiedad $\mathcal{H}/SL_2(\mathbb{Z})$.



De la teoría K algebraica

Entrada: una "categoría exacta" $\mathcal{C}$

ej. $\mathcal{C} = VB(X)$ o $\mathcal{C} = R\text{-}Proj_{ff} \cong VB(\operatorname{Spec} R)$

•) Grothendieck (1957)

$$K_0(\mathcal{C}) := \frac{\mathbb{Z}\left\langle \begin{matrix}\text{clases de iso de}\\ \text{objetos en } \mathcal{C}\end{matrix} \right\rangle}{[B]=[A]+[C] \text{ para toda s.e.c. } 0 \to A \to B \to C \to 0.}$$

•) Quillen (1973)

realización geom. del nervio "construcción de Quillen"

$$K_0(\mathcal{C}) \cong \pi_1(BQ\mathcal{C}, 0)$$

$$K_n(\mathcal{C}) := \pi_{n+1}(BQ\mathcal{C}, 0).$$

•) Quillen (1972) $K_0(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}$

$K_{2n}(\mathbb{F}_q) = 0$

$K_{2n-1}(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/(q^n - 1)\mathbb{Z}$

•) ~~Borel~~ Quillen (1973): $K_n(\mathcal{O}_F)$ son finitamente generados

•) Borel (1974):

$$\operatorname{rk} K_n(\mathcal{O}_F) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ r_1 + r_2, & n = 4k+1 \\ r_2, & n = 4k-1 \end{cases} \quad (k>0)$$

Note: $\operatorname{rk} K_{2n+1}(\mathcal{O}_F)$ = el orden de cero de $\zeta_F(s)$ en $s = -n$

La torsión en $K_n(\mathbb{Z})$???

•) Milnor, (1971): $K_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

•) Lee-Szczarba (1976) $K_3(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$

•) Rognes (2000): $K_4(\mathbb{Z}) = 0$.

•) Elbaz-Vincent, Gangl, Soulé (2002): $K_5(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$

•) Usando la conjetura de Bloch-Kato (Voevodsky-Rost):

$K_n(\mathbb{Z})$ $\boxed{\text{casi}}$ para todo n.

•) $K_n(\mathbb{Z}) = 0$ ~~para~~ si $4 | n$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\text{conjetura}}$ de Kummer-Vandiver.

$\boxed{9}$

§ Una conjetura de Lichtenbaum

·) $K_0(\mathcal{O}_F) \simeq Cl(F) \oplus \mathbb{Z}$

$K_1(\mathcal{O}_F) \simeq \mathcal{O}_F^\times$

·) El teorema de unidades de Dirichlet:

$\mathcal{O}_F^\times$ es f.g. de rango $r_1 + r_2 - 1$:

$$\mathcal{O}_F^\times \simeq \mathbb{Z}^{r_1+r_2-1} \oplus \mu_F$$

·) La fórmula de clase:

$$\lim_{s \to 0} s^{-(r_1+r_2-1)} \zeta_F(s) = - \frac{\# K_0(\mathcal{O}_F)_{tors}}{\# K_1(\mathcal{O}_F)_{tors}} R_F.$$

·) Lichtenbaum (1973):

$$\lim_{s \to n} (n-s)^{-d_n} \zeta_F(-s) \overset{???}{=} \pm 2^{???} \frac{\# K_{2n}(\mathcal{O}_F)}{\# K_{2n+1}(\mathcal{O}_F)_{tors}} R_{F,n}$$

$R_{F,n}$ - "reguladores superiores".

Ejemplo

$$\zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12}.$$

$$\frac{\# K_2(\mathbb{Z})}{\# K_3(\mathbb{Z})} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$$

Ejemplo $\qquad \zeta(-11) = -\dfrac{B_{12}}{12}$ $\cancel{\dfrac{691}{2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13.}}$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730.}$$

$$\frac{\# K_{22}(\mathbb{Z})}{\# K_{23}(\mathbb{Z})} = \frac{691}{65520}$$

$$\boxed{\frac{65520}{12\cdot 2730} = 2}$$

ζ funciones zeta de esquemas (Serre 1965)

X separado de t.f. $\downarrow$ Spec $\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ $\zeta_X(s) := \prod_{\substack{x \in X \\ \text{cerrado}}} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}}$ (Re $s >$ dim X)

$$N(x) := \# \left(\mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{x,x} \right) < \infty .$$

·) Nota: $\zeta_{\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q}(s) = \zeta_{\mathbb{F}_q}(s)$

$\zeta_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}}(s) = \zeta(s)$

·) Conjetura (!) prolongación meromorfa y ecuación funcional $\zeta_X(s) \leftrightarrow \zeta_X(\dim X - s)$.

·) los valores especiales (en $s = n$) pueden ser estudiados mediante la cohomología motivica $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}(n))$.

Lichtenbaum (2005):

§ Cohomología Weil-étale

·) gpos f.g. $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$,

nulos para $|i| >> 0$.

·) Sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n)) \xrightarrow{\otimes\mathbb{R}} H^{i+1}_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{R} \longrightarrow \cdots$$

·) $\lambda : \mathbb{R} \xrightarrow{\simeq} \left(\bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))^{(-1)^i}\right)\otimes\mathbb{R}$

·) $\mathbb{Z}\cdot\lambda(\zeta^*_X(n)^{-1}) = \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \det_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))^{(-1)^i}$

Historia: ·) Geisser (2004), Lichtenbaum (2005)

$X/\mathbb{F}_q$

·) Lichtenbaum (2009): $n=0$, $X = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_F$

·) Morin (2012): $n=0$, X regular, propio.

·) Flach-Morin (2018): $n\in\mathbb{Z}$, X ———

·) Morin (2018): $n<0$, X cualquier esquema aritmético