20/03/2020 Seminario PL, CIMAT

Complejos de ciclos de Geisser y reguladores

- Complejos de ciclos $\mathbb{Z}(n)$ y $\mathbb{Z}^c(n)$ para $X/\mathbb{Z}$
- Homología de Borel-Moore (motivación)
- Regulador vía KLM.
- Algunos problemas sobre el regulador

Sea X un esquema aritmético

Complejos de ciclos de Geisser y regularidad

$$X \xrightarrow[\text{de tipo finito}]{\text{separado}} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

20/03/2020

§ Complejos de ciclos ($\simeq$ Bloch)

Consideremos los simplejos algebraicos

$$\Delta^n := \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] \Big/ \left(1 - \sum_i t_i\right) \quad \left(\underset{\text{non can.}}{\simeq} \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}\right)$$

Recordatorio: la categoría Δ

objetos: $[n] := \{0 < 1 < \cdots < n\}$

morfismos: aplicaciones no decrecientes $\rho : [n] \longrightarrow [m]$

Una aplicación no decreciente $\rho : [n] \to [m]$ induce de manera funtorial $\tilde{\rho} : \Delta^n \to \Delta^m$ mediante

$$\tilde{\rho}(t_i) := \sum_{\rho(j) = i} t_j \qquad \left(\text{si } \rho^{-1}(i) = \emptyset, \text{ entonces } \tilde{\rho}(t_i) := 0\right)$$

Luego, tenemos

$$1 \times \tilde{\rho} : X \times \Delta^n \longrightarrow X \times \Delta^m,$$ de tal manera que

$X \times \Delta^\bullet : \Delta \to \mathrm{Sch}$ es un esquema cosimplicial.

Nota: Para un esquema relativo X/S

se define $\Delta^\bullet_S := \Delta^n \times S$, y se obtiene

$X \underset{S}{\times} \Delta^\bullet_S : \Delta \longrightarrow Sch/S$

definición Para $n, i \in \mathbb{Z}$ pongamos

ciclos algebraicos

1) $Z_n(X,i) := \mathbb{Z}\left\langle \begin{array}{l} \text{subesquemas enteros cerrados} \\ Z \subset X \times \Delta^i \quad \text{de dim. } n+i \\ \text{con intersección propia con} \\ \text{las caras de } \Delta^i \end{array} \right\rangle$

2) Para X equidimensional de dim d

$$Z^n(X,i) := \mathbb{Z}\left\langle \begin{array}{l} \cdots\cdots \\ Z \subset X \times \Delta^i \quad \text{de codim } n \\ \cdots\cdots \end{array} \right\rangle$$

Nota En el caso equidimensional

$$Z_n(X,i) = Z^{d-n}(X,i)$$

$Z_n(X,\bullet)$: $\Delta^{op} \longrightarrow Ab$

$Z^n(X,\bullet)$

son grupos abelianos simpliciales

de la siguiente manera

1) Si $\rho : [i] \hookrightarrow [j]$ es inyectiva, entonces $1 \times \tilde{\rho} : X \times \Delta^i \longrightarrow X \times \Delta^j$ es una inmersión cerrada y tenemos intersección

$$(1 \times \tilde{\rho})(X \times \Delta^i) \cdot Z \quad \text{para} \quad Z \subset X \times \Delta^j$$

(Cf. el artículo de Geisser en "Handbook of K-theory")

2) Si $\rho : [i] \twoheadrightarrow [j]$ es sobreyectiva, entonces $1 \times \tilde{\rho} : X \times \Delta^i \longrightarrow X \times \Delta^j$ es un morfismo plano y trae el "flat pullback" de ciclos algebraicos.

En ambos casos se obtiene

$$\rho^* : \begin{array}{l} z_n(X, j) \longrightarrow z_n(X, i) \\ z^n(X, j) \longrightarrow z^n(X, i) \end{array}$$

Como siempre, a un grupo abeliano simplicial se puede asociar un complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow z_n(X, i) \xrightarrow{d_i} z_n(X, i-1) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow z^n(X, i) \xrightarrow{d_i} z_n(X, i-1) \longrightarrow \cdots$$

Aquí $\quad d_i := \sum_{0 \leq l \leq i} (-1)^l \partial_l$

donde $\partial_l := \partial^{l*}$:= "la l-ésima cara"

$$\partial^l(j) := \begin{cases} j, & j < l \\ j+1, & j \geq l \end{cases}$$

"<u>Gavillificación</u>":

$$\left.\begin{array}{l} U \longmapsto z_n(U, i) \\ \longmapsto z^n(U, i) \end{array}\right|$$

define gavillas abelianas sobre $X_{ét}$ y X_{Zar}

<u>definición</u>

numeración opuesta para tener complejo cohomológico

$$\mathbb{Z}(n) := z^n(\sqcup, -\bullet)[-2n]$$

$$\mathbb{Z}^c(n) := z_n(\sqcup, -\bullet)[2n]$$

<u>Nota</u> En el caso equidimensional

$$\mathbb{Z}^c(n) = \mathbb{Z}(d-n)[2d].$$

§ Homología de Borel-Moore (motivación)

definición (Verdier) Sea X un espacio topológico localmente compacto. La homología de Borel-Moore viene dada por

$$R\Gamma_{BM}(X,\mathbb{Z}) := R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$$
$$H_i^{BM}(X,\mathbb{Z}) := H^{-i}(R\Gamma_{BM}(X,\mathbb{Z})).$$

(Para los detalles: Iversen, "Cohomology of sheaves")

Funtorialidad: 1) para un mapeo propio $X \to Y$ (= preimagen de compacto es compacta)

se obtiene $R\Gamma_c(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow R\Gamma_c(X,\mathbb{Z})$

y luego $R\Gamma_{BM}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow R\Gamma_{BM}(Y,\mathbb{Z})$

("proper pushforward")

2) para un abierto $U \hookrightarrow X$

se obtiene $R\Gamma_c(U,\mathbb{Z}) \longrightarrow R\Gamma_c(X,\mathbb{Z})$

y luego $R\Gamma_{BM}(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow R\Gamma_{BM}(U,\mathbb{Z})$

Además, si $Z \subset X$ es cerrado y $U := X \setminus Z$, se obtienen triángulos distinguidos

$$R\Gamma_c(U,\mathbb{Z}) \to R\Gamma_c(X,\mathbb{Z}) \to R\Gamma_c(Z,\mathbb{Z}) \to [+1]$$

$$\updownarrow$$

$$R\Gamma_{BM}(Z,\mathbb{Z}) \to R\Gamma_{BM}(X,\mathbb{Z}) \to R\Gamma_{BM}(U,\mathbb{Z}) \to [+1].$$

Geisser 2010 (Corollary 7.2)

1) Un morfismo propio de esquemas $f: X \to Y$ induce $Rf_* \mathbb{Z}^c_X(n) \longrightarrow \mathbb{Z}^c_Y(n)$
("proper pushforward")

2) Una inmersión abierta $f: U \hookrightarrow X$ induce
$$f^* \mathbb{Z}^c_X(n) \longrightarrow \mathbb{Z}^c_U(n)$$
("flat pullback")

Para un subesquema cerrado $Z \subset X$ y complemento abierto $U := X \setminus Z$ se tiene (el "triángulo de Borel-Moore")

$$R\Gamma(Z_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(U_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to [+1]$$

Conjetura (Lichtenbaum) los grupos

$$H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) := H^i(R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)))$$

son finitamente generados para todo $i \in \mathbb{Z}$ y $n < 0$.

<u>Nota</u> Esta conjemura implica que

•) $H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)) = 0$ para $i < 2\dim X$

•) $H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))$ es finito de 2-torsión para $i \gg 0$.

(razón: aquí interviene la cohomología de $G_{\mathbb{R}} = Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$)

§ <u>Regulador</u> Toma valores en la (co)homología de Deligne-Beilinson. Las referencias:

Esnault-Viehweg
Jannsen
} Beilinson volume (1988)

Sea $\mathcal{X}$ una variedad lisa (!) sobre $\mathbb{C}$.

cohomología $H^i_{D-B}(\mathcal{X}, \mathbf{A}(k))$

homología $H_i^{D-B}(\mathcal{X}, \mathbf{A}(k))$

$\boxed{\text{para un subanillo } \mathbb{Z} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbb{C}}$

Se definen usando una <u>buena</u> <u>compactificación</u>

$$\mathcal{X} \hookrightarrow \overline{\mathcal{X}} \hookleftarrow D := \overline{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$$

DCN

"Dualidad de Poincaré torcida" (Jannsen)

$$H^i_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(k)) \simeq H^{\mathcal{D}-\mathcal{B}}_{2d_{\mathbb{C}}-i}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(d_{\mathbb{C}}-k))$$

Aquí $'H^i_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(k)) :=$

$$H^i('C^\bullet_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\overline{\mathcal{X}}, D, \mathbb{R}(k)))$$

$$H_i^{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(k)) := {}'H^{-i}_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\mathcal{X}, \mathbb{R}(-k)).$$

Observación Para $k>0$ (!) se tiene un cuasi-isomorfismo

$$'C^\bullet_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}(\overline{\mathcal{X}}, D, \mathbb{R}(k)) \simeq R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(\mathcal{X}(\mathbb{C}), \mathbb{R}(1-k)), \mathbb{R})[-1]$$

$$=: R\Gamma_{BM}(\mathcal{X}(\mathbb{C}), \mathbb{R}(1-k))\ [-1]$$

donde $\mathbb{R}(1-k) := (2\pi i)^{1-k}\mathbb{R}$

(considerado como una gavilla constante con acción de $G_{\mathbb{R}} := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$)

Ahora para un esquema aritmético $X/\mathbb{Z}$ asumamos que $\dim X = d$, y que $X_{\mathbb{C}}$ es una variedad lisa quasi-projectiva (!)

$d_{\mathbb{C}} := \dim_{\mathbb{C}} X_{\mathbb{C}} = d-1.$

Kerr-Lewis-Müller-Stach (KLM): un morfismo en la categoría derivada

$$z^r(X_{\mathbb{C}}, -\bullet) \longrightarrow {}'C_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}^{2r-2d_{\mathbb{C}}+\bullet}(\overline{X}_{\mathbb{C}}, D, \mathbb{Z}(r-d_{\mathbb{C}}))$$

Tomamos $r = d-n$, donde $d = \dim X$, y $n < 0$ (!)

$$R\Gamma(X_{\mathbb{C},zar}, z^{d-n}(\llcorner\!\lrcorner, -\bullet)[2n]) \underset{\text{quiso para Zar}}{\simeq}$$

$$z^{d-n}(X_{\mathbb{C}}, -\bullet)[2n]) \xrightarrow{KLM}$$

$${}'C_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}^{2+\bullet}(\overline{X}_{\mathbb{C}}, D, \mathbb{Z}(1-n)).$$

Definamos

$$R\Gamma(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)) = R\Gamma(X_{\acute{e}t}, z_X^{d-n}(\llcorner\!\lrcorner, -\bullet)[2n]) \longrightarrow$$

$$R\Gamma(X_{zar}, z_X^{d-n}(\llcorner\!\lrcorner, -\bullet)[2n]) \longrightarrow$$

$$R\Gamma(X_{\mathbb{C},zar}, z_{X_{\mathbb{C}}}^{d-n}(\llcorner\!\lrcorner, -\bullet)[2n]) \xrightarrow{KLM}$$

$${}'C_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}^{2+\bullet}(\overline{X}_{\mathbb{C}}, D, \mathbb{Z}(1-n)) \xrightarrow{\pi_{\mathbb{R}}}$$

$${}'C_{\mathcal{D}-\mathcal{B}}^{2+\bullet}(\overline{X}_{\mathbb{C}}, D, \mathbb{R}(1-n)) \simeq$$

$$R\Gamma_{BM}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[1].$$

Todo esto es equivariante respecto la acción de $G_{\mathbb{R}} := Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})$

Tomando los $G_{\mathbb{R}}$-invariantes, se obtiene lo siguiente.

Definición El regulador (étale) viene dado por

$$Reg : R\Gamma\left(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)\right) \to R\Gamma_{BM}\left(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)\right)[1].$$

donde $R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, \cdots\cdots) := R\Gamma(G_{\mathbb{R}}, R\Gamma_{BM}(\cdots\cdots))$

Conjetura (Beilinson) El morfismo $\mathbb{R}$-dual

$$Reg^{\vee}: R\Gamma_c\left(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)\right)[-1] \to RHom\left(R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R}\right)$$

es un cuasi-isomorfismo.

§ Algunas preguntas

$\boxed{\text{Problema 1}}$ Bajo la hipótesis de que $n<0$ (!) dar una definición que vaya directamente a $R\Gamma_{BM}\left(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)\right)[1]$, sin pasar por un montón de cuasi-isomorfismos.

$\boxed{\text{Problema 2}}$ Quitar la hipótesis de que $X_{\mathbb{C}}$ es lisa y quasi-proyectiva que es necesaria para KLM.
(Asumir que $n<0$)

El regulador $Reg_{X,n}$ interviene en las fórmulas (conjeturales) para el valor especial de la función zeta

$$\zeta(X,s) := \prod_{\substack{x \in X \\ \text{cerrado}}} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}}, \quad N(x) := \# k(x)$$

en $s = n$. La función zeta satisface

$$\zeta(\mathbb{A}^r_X, s) = \zeta(X, s-r), \quad \mathbb{A}^r_X := \mathbb{A}^r \times X$$

$$\zeta(X,s) = \zeta(U,s) \cdot \zeta(Z,s)$$

Por esto cualquier construcción del regulador debe ser compatible con $X \rightsquigarrow \mathbb{A}^r_X$ y con "descomposiciones cerrado-abiertas" $Z \hookrightarrow X \hookleftarrow U$.

$\boxed{\text{Problema 3}}$ Verificar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n-r))[2r] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "Reg_{X,n-r}[2r]"'] \arrow[dr, phantom, "?"] & R\Gamma(\mathbb{A}^r_{X,ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \arrow[d, "Reg_{\mathbb{A}^r_X,n}"] \\
R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n-r))[2r+1] \arrow[r, "\simeq"] & R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, \mathbb{A}^r_X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[1]
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Problema 4}}$ Para $Z \hookrightarrow X \hookleftarrow U := X \setminus Z$

tenemos "triángulos de Borel-Moore"

$$R\Gamma(Z_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(U_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to [+1]$$

y

$$R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, Z(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)) \to R\Gamma_{BM}(G_{\mathbb{R}}, U(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)) \to [+1].$$

Verificar que en este caso $(Reg_{Z,n}, Reg_{X,n}, Reg_{U,n})$ es un morfismo de triángulos distinguidos.

<u>Nota</u>: en ese caso

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la conjetura de}\\ \text{Beilinson para}\\ X\end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{c}\text{la conjetura de}\\ \text{Beilinson para}\\ \mathbb{A}^r_X\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{la conjetura de}\\ \text{Beilinson para}\\ Z \text{ y } U\end{array}} \implies \boxed{\begin{array}{c}\text{la conjetura de}\\ \text{Beilinson para}\\ X\end{array}}$$

Podría contar en otra ocasión:

- ·) Los resultados de Geisser sobre $\mathbb{Z}^c(n)$ y dualidad aritmética (la razón de ser de $\mathbb{Z}^c(n)$)
- ·) (co)homología de Deligne-Beilinson
- ·) El regulador KLM.