Cohomología Weil-étale para n < 0

Alexey Beshenov

(Centro de Investigación en Matemáticas, México)

09/02/2021

Seminario de la teoría de números UAM-ICMAT

Plan de charla

1. **Motivación**: funciones zeta aritméticas, valores especiales y su interpretación cohomológica.
2. **Programa Weil-étale de Lichtenbaum**: ideas y resultados principales.
3. **Mi trabajo**: conjeturas y resultados incondicionales.
4. **Preguntas para el futuro**.

Motivación (motívica)

Funciones zeta aritméticas y sus valores especiales

- **Esquema aritmético** X = separado, de tipo finito sobre $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.
- **Función zeta**:

$$X \rightsquigarrow \zeta(X,s) = \prod_{\substack{x\in X\\ \text{cerrado}}} \frac{1}{1-\#\kappa(x)^{-s}}$$

- Convergencia para $s > \dim X$.
- Conjetura: prolongación meromorfa a $s \in \mathbb{C}$, ecuación funcional $\zeta(X,s) \leftrightarrow \zeta(X, \dim X - s)$.
- Fijemos $n \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{ord}_{s=n}\zeta(X,s) = d_n :=$ **orden de anulación** en $s = n$.
- **Valor especial**: $\zeta^*(X,n) := \lim_{s\to n}(s-n)^{-d_n}\,\zeta(X,s)$.

Ejemplos extensivamente estudiados

- **Función zeta de Dedekind** (siglo XIX).
  $F/\mathbb{Q}$ cuerpo de números, $\mathcal{O}_F \subset F$ anillo de enteros.

$$\zeta_F(s) := \zeta(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_F, s) \stackrel{\text{Euler}}{=} \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_F} \frac{1}{\#(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})^s}.$$

  E.g. $\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \zeta(\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, s) = \zeta(s)$.

- **Función zeta de Hasse–Weil** (siglo XX).
  $X/\mathbb{F}_q$ variedad sobre cuerpo finito.

$$Z(X,t) := \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{\#X(\mathbb{F}_{q^k})}{k}\, t^k\right) \stackrel{\text{Dwork}}{\in} \mathbb{Q}(t).$$

$$\zeta(X,s) = Z(X, q^{-s}).$$

  Conjeturas de Weil (Grothendieck, Deligne, ...)

Fórmula del número de clases (Dirichlet)

- $s = 0$.
- $\operatorname{ord}_{s=0} \zeta_F(s) = r_1 + r_2 - 1 = \operatorname{rk} \mathcal{O}_F^\times$.
- $\zeta_F^*(0) = -\frac{\#\operatorname{Pic}(\mathcal{O}_F)}{\#(\mathcal{O}_F)_{tors}^\times} R_F$.
- Similar para curvas proyectivas lisas $X/\mathbb{F}_q$:
  $\operatorname{ord}_{s=0} \zeta(X,s) = -1$ y $\zeta^*(X,0) = \frac{\#\operatorname{Pic}^0(X)}{q-1}$.
- ¿Generalizaciones?

Cohomología motívica étale

- Lichtenbaum, 1984: complejos hipotéticos (!) de haces sobre $X_{ét}$ responsables por los valores especiales.
- Bloch, 1986: complejos de ciclos / grupos de Chow superiores.
- Versión étale: complejo de haces $\mathbb{Z}^c(n)$ sobre $X_{ét}$.
- Funciona para $X/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ (Levine, Geisser, ...).
- Para X propio, regular, $d = \dim X$:

$$\underbrace{H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}_{\text{coh. de Borel–Moore motívica}} \qquad = \underbrace{H^{i+2d}(X_{ét}, \mathbb{Z}(d-n))}_{\text{coh. motívica habitual}}.$$

- Pocos cálculos explícitos disponibles.
- Generación finita — ???

Conjetura cohomológica de Lichtenbaum

- $n \leq 0$.
- $d_n = \operatorname{ord}_{s=n} \zeta_F(s) = \begin{cases} r_1 + r_2, & n < 0 \text{ par}, \\ r_1, & n < 0 \text{ impar}. \end{cases}$
- $\mathbb{Z}^c(0) = \mathbb{G}_m[1]$,
  $\zeta_F^*(0) = -\frac{\#H^1(X_{ét}, \mathbb{G}_m)}{\#H^0(X_{ét}, \mathbb{G}_m)_{tors}} R_F = -\frac{\#H^0(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(0))}{\#H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(0))_{tors}} R_F$.
- **Conjetura**: para $n \leq 0$

$$\zeta_F^*(n) = \pm \frac{\#H^0(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}{\#H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))_{tors}} R_{F,n}.$$

- En términos de $K_i(\mathcal{O}_F)$, para F real, n impar ($R_{F,n} = 1$): Lichtenbaum, 1973.
- **Reguladores superiores**: Borel, Beilinson:

$$R_{F,n} = \operatorname{vol} \operatorname{coker}\Big(\underbrace{H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}_{\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} = d_n} \to \underbrace{H^1_{\mathcal{D}}(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))}_{\dim_{\mathbb{R}} = d_n}\Big).$$

- Teorema para $F/\mathbb{Q}$ abeliano (¡mediante TNC!).

Cohomología Weil-étale

Estructura de la cohomología motívica para $X/\mathbb{Z}$ (Lichtenbaum)

- Conjeturalmente (!)

$$H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) = \begin{cases} \text{finitamente generado}, & i \le -2n, \\ \text{finito}, & i = -2n+1, \\ \text{tipo cofinito}, & i \ge -2n+2. \end{cases}$$

- Tipo cofinito = $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-dual a finitamente generado. Manifestación de dualidad aritmética (Artin–Verdier, ...).
- * si $n < 0$, entonces $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$ son finitamente generados.
- Conjetura de Beilinson–Soulé: $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) = 0$ para $i < -2 \dim X$.
- En general, $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \neq 0$ para $i \gg 0$.

Estructura de la cohomología motívica para $X/\mathbb{F}_q$ (Lichtenbaum)

- Conjeturalmente (!)

$$H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) = \begin{cases} \text{finito}, & i \neq -2n,\ -2n+2, \\ \text{finitamente generado}, & i = -2n, \\ \text{tipo cofinito}, & i = -2n+2. \end{cases}$$

- * si $n < 0$, entonces $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$ son finitos.

Cohomología Weil-étale (Lichtenbaum)

- Cohomología motívica étale $\rightsquigarrow$ cohomología Weil-étale.
- Grupos $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ finitamente generados, nulos para $i \gg 0$.
- Sucesión exacta

$$\cdots \to H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\smile \theta} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \to \cdots$$

- $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ codifica $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s)$ y $\zeta^*(X, n)$. (¡Detalles más adelante!)

Algunos resultados

- «Resultado» =
  - definir $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ asumiendo las conjeturas de Lichtenbaum sobre estructura de cohomología motívica,
  - formular la relación conjetural de $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ con $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s)$ y $\zeta^*(X, n)$,
  - establecer relaciones con otras conjeturas, probar casos particulares.
- Lichtenbaum (2005): $X/\mathbb{F}_q$.
- Geisser (2004–...): $X/\mathbb{F}_q$, posiblemente singular.
- Lichtenbaum (2009): $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$.
- Morin (2014): $X/\mathbb{Z}$ propio y regular, $n = 0$.
- Flach, Morin (2018): ———————, $n \in \mathbb{Z}$.
- B. (2020/21): cualquier esquema aritmético $X/\mathbb{Z}$, $n < 0$.

Mi trabajo

Complejos Weil-étale

- $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ separado, de tipo finito, $n < 0$.
- Asumamos $\mathbf{L}^c(X_{\acute{e}t}, n)$: los grupos $H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))$ son finitamente generados para todo $i \in \mathbb{Z}$.
- Existe complejo $R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$.
- $H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$ son finitamente generados, nulos para $i \notin [0, 2\dim X + 1]$.
- Se escinde con coeficientes racionales/reales:

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \cong \begin{array}{c} R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R})[-1] \\ \oplus \\ R\Gamma_c(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[-1] \end{array}$$

- $\mathbb{R}(n) := (2\pi i)^n \mathbb{R}$, $G_\mathbb{R} := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Ingrediente principal de la construcción

- Dualidad aritmética

$$\operatorname{Hom}(\underbrace{H^{2-i}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))}_{\text{finitamente generado}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \underbrace{\widehat{H}^i_c(X_{ét}, \mathbb{Z}'(n))}_{\text{tipo cofinito}},$$

- $\mathbb{Z}'(n) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}'(n)[-1] = \bigoplus_p \varinjlim_r j_{p!}\mu_{p^r}^{\otimes n}[-1]$, $j_p \colon X[1/p] \hookrightarrow X$.
- $\widehat{H}^i_c$ = cohomología modificada, toma en cuenta $X(\mathbb{R})$.
- Generalización de la dualidad de Artin–Verdier para $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$.

Regulador

- Asumamos que la fibra $X_{\mathbb{C}}$ es lisa.
- Construcción de Kerr–Lewis–Müller-Stach $\Longrightarrow$

$$Reg\colon R\Gamma(X_{\acute{e}t}, \mathbb{R}^c(n)) \to R\mathrm{Hom}(R\Gamma_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n)), \mathbb{R}[1]).$$

- * La llegada no es la (co)homología de Deligne–Beilinson, sino simplemente $H^i_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))^\vee$, porque $n < 0$.
- Conjetura $\mathbf{B}(X, n)$ (Beilinson):

$$Reg^\vee\colon R\Gamma_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[-1] \to R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R})$$

es un cuasi-isomorfismo.

Conjetura del orden de anulación

- **VO**(X, n): asumiendo $\mathbf{L}^c(X, n)$,

$$\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \cdot i \cdot \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)). \qquad (*)$$

- Asumiendo $\mathbf{B}(X, n)$,

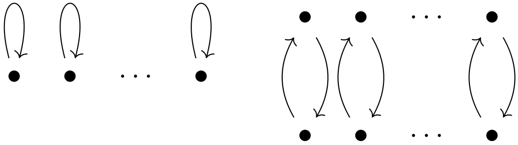
$$\operatorname{ord}_{s=n} \zeta(X, s) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{R}} H^i_c(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))^{G_{\mathbb{R}}} \qquad (**)$$

$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^{i+1} \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)). \qquad (***)$$

- (**) concuerda con la ecuación funcional (conjetural). Para $n < 0$ polos y ceros vienen de los Γ-factores.
- (***) concuerda con una conjetura de Soulé (1984).

Ejemplo de juguete

- $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$. Espacio $X(\mathbb{C})$ con $G_{\mathbb{R}}$-acción:



r_1 puntos $\qquad\qquad$ $2\,r_2$ puntos

- Complejo $R\Gamma_c(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))$:

$$\mathbb{R}(n)^{\oplus r_1} \oplus (\mathbb{R}(n) \oplus \mathbb{R}(n))^{r_2},$$

  $G_{\mathbb{R}}$-acción por $z \mapsto \bar{z}$ vs. $(z, w) \mapsto (\overline{w}, \bar{z})$.

- $\operatorname{ord}_{s=n} \zeta_F(s) = \dim_{\mathbb{R}} H^0_c(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))^{G_{\mathbb{R}}} =$ $\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^{-1}_{\acute{e}t}(X, \mathbb{Z}^c(n)) = \left\{ \begin{array}{ll} r_1 + r_2, & n \text{ par}, \\ r_2, & n \text{ impar}. \end{array} \right\}$

Determinantes de complejos

- Para módulos proyectivos finitamente generados:
  $\det_R P := \bigwedge^{\operatorname{rk} P} P$
  (invertible = proyectivo de rk 1).
- Funtor

$$\begin{pmatrix} \text{módulos proyectivos f.g.,} \\ \text{isomorfismos} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \text{módulos invertibles,} \\ \text{isomorfismos} \end{pmatrix}.$$

- Knudsen, Mumford, 1976: extensión

$$\begin{pmatrix} \text{complejos perfectos,} \\ \text{cuasi-isomorfismos} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \text{módulos invertibles,} \\ \text{isomorfismos} \end{pmatrix}.$$

- $\det_R A^\bullet \cong \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} (\det_R H^i(A^\bullet))^{(-1)^i}$, $\det_R 0 \cong R$.
- Compatibilidad con cambio de base.

Morfismo de trivialización

- Cuasi-isomorfismo de complejos, asumiendo $\mathbf{B}(X,n)$:

$$\begin{array}{c} R\Gamma_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[-2] \\ \oplus \\ R\Gamma_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[-1] \end{array}$$

* $\det_R(A^\bullet \oplus A^\bullet[1]) \cong R$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle \cong}\ {\scriptstyle Reg^\vee[-1]\oplus id}$$

$$\begin{array}{c} R\mathrm{Hom}(R\Gamma(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R})[-1] \\ \oplus \\ R\Gamma_c(G_{\mathbb{R}}, X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(n))[-1] \end{array} \xrightarrow[\cong]{\text{escisión}} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R}$$

- Isomorfismo de determinantes:

$$\lambda\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \det_{\mathbb{R}}\Big(R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\otimes\mathbb{R}\Big) \cong \Big(\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X,\mathbb{Z}(n))\Big)\otimes\mathbb{R}.$$

Conjetura del valor especial

- Definimos
$$\lambda\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \underbrace{(\det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)))}_{\mathbb{Z}\text{-módulo de rk } 1} \otimes \mathbb{R}.$$
- Asumamos
  - $\mathbf{L}^c(X_{\acute{e}t}, n)$: generación finita de $H^i(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}^c(n))$,
  - fibra $X_{\mathbb{C}}$ lisa,
  - $\mathbf{B}(X, n)$: regulador,
  - prolongación meromorfa alrededor de $s = n < 0$.
- $\mathbf{C}(X, n)$: el valor especial es $s = n$ se determina salvo signo por
$$\lambda(\zeta^*(X, n)^{-1}) \cdot \mathbb{Z} = \det_{\mathbb{Z}} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)).$$

Caso de variedades sobre cuerpos finitos

- $\mathbf{C}(X, n)$ es equivalente a la fórmula

$$\zeta(X, n) = \prod_{i \in \mathbb{Z}} |H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))|^{(-1)^i}.$$

- Ejemplo singular: cúbica nodal $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}/(0 \sim 1)$.

$$H^{-1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) = \mathbb{Z}/(q^{1-n} - 1),$$
$$H^{0,1}(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) = \mathbb{Z}/(q^{-n} - 1).$$

$$\zeta(X, s) = \frac{1}{1 - q^{1-s}}.$$

- $\mathbf{C}(X, n)$ se cumple incondicionalmente, asumiendo $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$, si $X/\mathbb{F}_q$ es lisa y proyectiva.
- Se cumple para cualquier X, asumiendo resolución de singularidades sobre $\mathbb{F}_q$ (!!)

Compatibilidades

- **Uniones disjuntas**: si $X = \coprod_{1 \le i \le r} X_i$, entonces
$$\zeta(X,s) = \prod_{1 \le i \le r} \zeta(X_i, s).$$
- De acuerdo con esto,
$$\begin{aligned} \mathbf{VO}(X,n) &\iff \mathbf{VO}(X_i,n) \text{ para todo } i, \\ \mathbf{C}(X,n) &\iff \mathbf{C}(X_i,n) \text{ para todo } i. \end{aligned}$$
- **Descomposiciones cerrado-abiertas**: para $Z \not\hookrightarrow X \hookleftarrow U$,
$$\zeta(X,s) = \zeta(Z,s) \cdot \zeta(U,s).$$
- Dos de las tres conjeturas $\mathbf{VO}(X,n)$, $\mathbf{VO}(Z,n)$, $\mathbf{VO}(U,n)$ (resp. $\mathbf{C}(X,n)$, $\mathbf{C}(Z,n)$, $\mathbf{C}(U,n)$) implican la tercera.
- **Fibrados afines**: $\zeta(\mathbb{A}^r_X, s) = \zeta(X, s-r)$.
- $\mathbf{VO}(\mathbb{A}^r_X, n) \iff \mathbf{VO}(X, n-r)$, $\mathbf{C}(\mathbb{A}^r_X, n) \iff \mathbf{C}(X, n-r)$.

Aplicación: resultados nuevos incondicionales

- Esquema **celular** $X \to B$: admite filtración por cerrados

$$X = Z_N \supseteq Z_{N-1} \supseteq \cdots \supseteq Z_0 \supseteq Z_{-1} = \emptyset,$$

  donde $Z_i \setminus Z_{i-1} \cong \coprod_j \mathbb{A}_B^{r_{i_j}}$

- **Teorema** (B.): Sea B un esquema aritmético 1-dimensional. Asumamos que para todo punto genérico $\eta \in B$ se cumple uno de los dos:
  a) char $\kappa(\eta) = p > 0$;
  b) char $\kappa(\eta) = 0$ y $\kappa(\eta)/\mathbb{Q}$ es un cuerpo de números abeliano.

  Entonces, $\mathbf{VO}(X, n)$ y $\mathbf{C}(X, n)$ se cumplen para todo $n < 0$ y todo esquema aritmético B-celular X con la fibra $X_{\mathbb{C}}$ lisa.

- Idea: $\mathbf{C}(X, n)$ se conoce para curvas y cuerpos de números abelianos $F/\mathbb{Q}$ (¡via TNC!). Proceder por inducción usando las compatibilidades.

Algunas preguntas para el futuro

- El regulador de Kerr–Lewis–Müller-Stach está definido para la fibra $X_{\mathbb{C}}$ lisa.
  ¿Cómo extenderlo al caso singular y conectar a esta maquinaria aritmética?
- Cuando la comparación tiene sentido, $\mathbf{C}(X, n)$ es equivalente a la TNC.
  ¿Cómo formular un análogo equivariante compatible con la ETNC?

¡Gracias por su atención!