Valores especiales de funciones zeta de esquemas aritméticos para enteros negativos y la cohomología Weil-étale

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Laboratorio Internacional de Matemáticas Samuel Gitler, Ciudad de México, 16/05/2019

1 Introducción

Uno de los objetos más estudiados en matemáticas es la función zeta de Riemann, que puede ser definida mediante el **producto de Euler**

$$\zeta(s) := \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Este producto converge para $\operatorname{Re} s > 1$ y tiene una prolongación meromorfa a todo el plano complejo con un polo simple en $s = 1$. Se cumple la **ecuación funcional**

$$\zeta(s) = 2^s\, \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s).$$

En esta historia nos interesan los valores de $\zeta(s)$ para $s = n \in \mathbb{Z}$ un número entero. Por ejemplo, Euler calculó que

$$\zeta(-n) = -\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad \text{para } n \geq 0$$

donde $B_n \in \mathbb{Q}$ son los **números de Bernoulli**. Gracias a la ecuación funcional, esto nos da los valores $\zeta(2n)$ para $n \geq 1$ (solo que la fórmula no se ve tan bonita). Los números $\zeta(2n+1)$ son mucho más misteriosos: se supone que todos son trascendentes y algebraicamente independientes, pero uno está muy lejos de probarlo. Hay muchos avances, pero por el momento se concentran en la demostración de la *irracionalidad*.

El problema que nos interesa es *encontrar una teoría de cohomología que codifique los valores de $\zeta(n)$ para $n \in \mathbb{Z}$*. Y de hecho, vamos a trabajar con una vasta generalización de la función zeta de Riemann.

2 Función zeta de un esquema aritmético

Sea X un **esquema aritmético**

$$\begin{array}{c} X \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \text{separado} \atop \text{de tipo finito}} \\ \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{array}$$

La función zeta de X tiene una definición similar:

$$\zeta_X(s) := \prod_{x \in X \text{ punto cerrado}} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}},$$

donde $N(x)$ denota la cardinalidad del cuerpo residual en $x \in X$. La hipótesis de que X sea de tipo finito implica que $N(x) < \infty$. El producto converge para $\operatorname{Re} s > \dim X$ y *conjeturalmente* tiene una prolongación meromorfa.

Asumiendo la prolongación meromorfa alrededor de $n \in \mathbb{Z}$, pongamos

$$d_n := \operatorname{ord}_{s=n} \zeta_X(s) := \text{el orden de anulación en } s = n.$$

Luego, el **valor especial** en $s = n$ es el término mayor de la serie de Taylor:

$$\zeta_X^*(n) := \lim_{s \to n} (s-n)^{-d_n} \, \zeta_X(s).$$

Ejemplos

He aquí algunos ejemplos importantes.

- Si $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, entonces se recupera precisamente la función zeta de Riemann.
- Para una extensión finita de cuerpos $F/\mathbb{Q}$, consideremos el **anillo de enteros** correspondiente:

  $$O_F := \{ x \in F \mid f(x) = 0 \text{ para algún polinomio } \underline{\text{mónico}} \ f \in \mathbb{Z}[X],\ f \neq 0 \}.$$

  Por ejemplo,

  $$O_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})} = \mathbb{Z}[\alpha], \quad \alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

  $$\begin{tikzcd}
F \arrow[dd, dash, "d<\infty"'] \arrow[dr, dash] & \\
& O_F \arrow[dd, dash, "\text{libre de rango } d"] \\
\mathbb{Q} \arrow[dr, dash] & \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

  En este caso

  $$\zeta_F(s) := \zeta_{\operatorname{Spec} O_F}(s) := \text{la función zeta de Dedekind de } F.$$

  Esta función ha sido estudiada extensivamente en la teoría de números algebraicos a partir del siglo XIX. La función zeta de Dedekind también tiene prolongación meromorfa con un polo simple en $s = 1$, satisface una ecuación funcional $\zeta_F(s) \leftrightarrow \zeta_F(1-s)$, etcétera.
- Si queremos trabajar con algo más geométrico, podemos tomar una variedad sobre un cuerpo finito $X/\mathbb{F}_q$. En este caso

  $$\zeta_X(s) = Z_X(q^{-s}), \quad \text{donde } Z_X(t) := \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{\# X(\mathbb{F}_{q^k})}{k} \, t^k \right).$$

  Notamos que $Z_X(t)$ es una función generatriz que cuenta el número de puntos de X sobre diferentes extensiones de $\mathbb{F}_q$.

  Para dar un ejemplo sencillo, si E es la curva elíptica $Y^2 Z = X^3 - XZ^2$ considerada sobre, digamos, $\mathbb{F}_3$, entonces uno puede calcular que $Z_E(t) = \frac{1+3t^2}{(1-t)\,(1-3t)}$. Además, se ve que $\zeta_E(s) = \zeta_E(1-s)$, que es una especie de ecuación funcional.

  En general, para cualquier variedad proyectiva lisa $X/\mathbb{F}_q$

- $Z_X(t)$ es una función racional;
- existe una descripción de sus polos y ceros (mediante la **cohomología ℓ-ádica**);
- existe una ecuación funcional que relaciona $\zeta_X(s)$ con $\zeta_X(\dim X - s)$.

Todo esto constituye las **conjeturas de Weil** (1949) que fueron el santo grial de la geometría algebraica groethendieckiana. El punto final en las pruebas puso Pierre Deligne en 1973.

El mundo de las variedades sobre cuerpos finitos une aritmética y geometría, y esto explica el éxito en la resolución de las conjeturas de Weil. Para esquemas aritméticos en general, todavía falta entender la verdadera geometría que está detrás. Nosotros tratamos de construir una teoría de cohomología que refleje las propiedades de la función zeta; esta teoría (en gran parte también conjetural) es una sombra de esa geometría hipotética.

3 Interpretación cohomológica de los valores especiales

La primera interpretación cohomológica de los valores especiales es la **fórmula de clases de Dirichlet** para la función zeta de Dedekind:

$$\zeta_F^*(0) = -\frac{\# Cl(F)}{\# \mu_F}\, R_F,$$

donde

- $Cl(F)$ es el **grupo de clases** de F, que es siempre finito,
- $\mathcal{O}_F^\times$ es un grupo abeliano finitamente generado y $\mu_F = (\mathcal{O}_F^\times)_{tors}$,
- la parte libre de $\mathcal{O}_F^\times$ se encaja de cierta manera canónica como un retículo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, y luego $R_F := \operatorname{vol} \Lambda$ es el **regulador de Dirichlet**.

El grupo de clases es un invariante cohomológico: tenemos

$$Cl(F) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) = \operatorname{Pic}(X), \quad \text{donde } X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F.$$

Por ejemplo, si $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, entonces

$$Cl(F) = 1, \quad \mathcal{O}_F^\times = \langle \alpha \rangle \times \langle \pm 1 \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad R_F = \log \alpha.$$

La función zeta de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ tiene un cero simple en 0, y el residuo correspondiente es $\zeta^*_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(0) = -\frac{\log \alpha}{2}$.

En el siglo XX hubo varias fórmulas conjeturales para los valores especiales (algunos nombres relacionados son Armand Borel, Alexander Beilinson, Stephen Lichtenbaum, Spencer Bloch, Kazuya Kato, ...), pero aquí hablaré de un programa relativamente reciente, propuesto e iniciado por Lichtenbaum y conocido como la **cohomología Weil-étale***. He aquí una pequeña cronología.

- Lichtenbaum, 2005: construcción de la cohomología Weil-étale para $X/\mathbb{F}_q$.

  (Más resultados para esta situación por Thomas Geisser.)
- Lichtenbaum, 2009: el caso de $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$ y $n = 0$.

*Aquí “étale” se refiere por supuesto a la cohomología étale, mientras que “Weil” se refiere al **grupo de Weil** en la teoría de cuerpos de clases.

- Baptiste Morin, 2014: el caso de X un esquema aritmético regular propio, $n = 0$.
- Matthias Flach, Baptiste Morin, 2016: lo mismo para cualquier $n \in \mathbb{Z}$.

En mi tesis de doctorado dirigida por Baptiste Morin en Burdeos y Bas Edixhoven en Leiden (defendida en diciembre), quité la restricción “regular propio” (esto debe de complicar todas las cosas), pero restringiéndome al caso de $n < 0$ (resulta que esto simplifica ciertos aspectos).

Para dar un ejemplo simple, pero a la vez importante, el anillo de enteros $\mathcal{O}_F$ es siempre regular. Sin embargo, si por ejemplo para $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ se puede considerar el anillo más pequeño

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right],$$

y este ya no es regular. Tal cosa se llama un **orden no maximal en el anillo de enteros**, y sería interesante estudiar de manera cohomológica su función zeta.

Todo lo que voy a describir está basado en las ideas de Flach y Morin.

4 Motivación para la cohomología motívica

Usando la notación mucho más reciente, la fórmula de Dirichlet puede ser escrita en términos de la **cohomología motívica**:

$$\zeta_F^*(0) = -\frac{\#H^0(X, \mathbb{Z}^c(0))}{\#H^{-1}(X, \mathbb{Z}^c(0))_{tors}}\, R_F.$$

Ahora haré una digresión para explicar qué es esto.

Hay diferentes construcciones de la cohomología motivica, y la que nos servirá para trabajar sobre $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ se basa en los **complejos de ciclos de Bloch** (1986). Al principio las ideas de Bloch tenían ciertos obstáculos técnicos, pero después han sido desarrolladas exitosamente entre otros por Marc Levine y Thomas Geisser.

Ya que el público presente consiste principalmente en topólogos algebraicos, se puede dar la siguiente motivación. La **sucesión espectral de Atiyah–Hirzebruch** para un complejo celular X y una teoría de cohomología generalizada* $E^\bullet$ toma la forma

$$E_2^{p,q} = H^p(X; E^q(pt)) \Longrightarrow E^{p+q}(X),$$

y en particular puede ser empleada para calcular la **teoría K topológica** $K^\bullet(X)$ (la que clasifica los fibrados vectoriales complejos sobre X).

En el mundo algebraico, tenemos la **teoría K algebraica** de Quillen, ideológicamente motivada por la topológica. Para una variedad X/k existe la **sucesión espectral de Bloch–Lichtenbaum**

$$E_2^{p,q} = H^{p-q}(X, \mathbb{Z}(-q)) \Longrightarrow K_{-p-q}(X)$$

(generalizada más adelante por Eric Friedlander, Andrei Suslin, Marc Levine). Aquí tenemos ciertos grupos doblemente indexados

$$H^i(X, \mathbb{Z}(n)), \quad i, n \in \mathbb{Z},$$

que son precisamente la cohomología motívica. En este sentido uno puede pensar en la cohomología motívica como en un análogo de la cohomología singular. Esta sucesión espectral da una muy buena motivación, pero también significa que la cohomología motívica es extremadamente difícil de calcular, tal como la teoría K algebraica.

*Algo que cumple los axiomas de Eilenberg–Steenrod, salvo el axioma de dimensión

Fue también Lichtenbaum quien en 1971 tuvo la idea de relacionar la teoría K algebraica con los valores especiales, pero parece que la cohomología motívica es un invariante más fino y adecuado para estos propósitos.

* * *

Ahora bien, "$\mathbb{Z}(n)$" no es simplemente una parte de la notación: este es un complejo de **haces**[*] **étales** que se construye a partir de un esquema X.

Thomas Geisser (2010) también introdujo los **complejos de ciclos de Bloch dualizantes** $\mathbb{Z}^c(n)$. Continuando la analogía topológica, uno debería pensar en $\mathbb{Z}^c(n)$ como en la **cohomología de Borel–Moore**. Recordemos que si X es un espacio localmente compacto, $U \subset X$ es abierto y $Z := X \setminus U$ es el complemento cerrado,

$$U \to X \leftarrow Z$$

entonces se tiene un triángulo distinguido para la cohomología de soporte compacto

$$R\Gamma_c(U, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_c(Z, \mathbb{Z})$$

La cohomología de Borel-Moore (en la definición de Verdier) es

$$R\Gamma_{BM}(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{RHom}(R\Gamma_c(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}),$$

lo que nos da el triángulo distinguido

$$R\Gamma_{BM}(Z, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_{BM}(X, \mathbb{Z}) \to R\Gamma_{BM}(U, \mathbb{Z})$$

Geisser dio una definición ad hoc de los complejos de haces $\mathbb{Z}^c(n)$ y probó entre otras cosas que estos se comportan como la cohomología de Borel–Moore: si tenemos una "descomposición abierto-cerrada" de esquemas

$$U \to X \leftarrow Z$$

entonces hay un triángulo distinguido

$$R\Gamma(Z_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma(U_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$$

Geisser identificó $\mathbb{Z}^c(n)$ como complejos dualizantes en ciertos contextos aritméticos (que generalizan la **dualidad de Artin–Verdier**).

Todas mis construcciones se basan en los complejos dualizantes de Geisser $\mathbb{Z}^c(n)$. Para proceder, será necesario asumir la siguiente conjetura.

Conjetura $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$. *Los grupos* $H^i(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$ *son finitamente generados.*

Esta es una conjetura estándar, pero actualmente está fuera de alcance. Se conocen algunos casos simples como por ejemplo $X = \operatorname{Spec} O_F$ (la generación finita de $K_i(O_F)$ es un resultado clásico de Quillen), o una pequeña clase de variedades lisas proyectivas $X/\mathbb{F}_q$.

5 Cohomología Weil-étale

Mi tesis contiene la siguiente construcción. Bajo la conjetura $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$, para un esquema aritmético X y $n < 0$, existe un complejo de grupos abelianos

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)),$$

[*] También conocidos como *gavillas* :-)

donde W significa “Weil-étale” y “c” significa “soporte compacto”. La **cohomología Weil-étale** se define entonces como

$$H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) := H^i(R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))).$$

Es fácil entender qué sucede con este complejo después de tensorizarlo con $\mathbb{R}$: este se escinde (de manera no canónica) como

$$R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \cong \mathrm{RHom}(R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R})[-1] \oplus R\Gamma_c(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})[-1].$$

Ya expliqué en dos palabras qué es $R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n))$. El segundo complejo $R\Gamma_c(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})$ es la cohomología $G_\mathbb{R} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-equivariante de soporte comparto del espacio de puntos complejos $X(\mathbb{C})$. A saber, $G_\mathbb{R}$ actúa por conjugación sobre $X(\mathbb{C})$ y sobre los coeficientes $(2\pi i)^n\, \mathbb{R}$, así que el complejo $R\Gamma_c(X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})$ viene con una acción del grupo de Galois y se puede considerar la cohomología de grupos correspondiente. En este caso bien particular (dado que se trata de espacios vectoriales reales),

$$H^i_c(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R}) \cong H^i_c(X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})^{G_\mathbb{R}}.$$

6 Extracción de los valores especiales

La fórmula de cláses de Dirichlet para $\zeta_F^*(0)$, aparte de invariantes algebraicos, contiene un número real que es el regulador. En general, para obtener los valores especiales en $s = n$, necesitamos un análogo de reguladores para diferentes enteros n y para cualquier esquema aritmético X. Estos son los **reguladores superiores** que fueron investigados entre otros por Armand Borel, Beilinson. Hoy en día existen varias construcciones, y yo uso una reciente que pertenece a Matt Kerr, James Lewis y Stefan Müller-Stach (2006). Para $n < 0$ y $X_\mathbb{C}$ liso y cuasi-proyectivo su regulador produce un morfismo de complejos

$$Reg\colon R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)) \to R\Gamma_{BM}(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})[1]$$

Otra conjetura común (pero también fuera de alcance en toda su generalidad) es la siguiente.

Conjetura B(X, n)**.** *El regulador induce un cuasi-isomorfismo*

$$Reg^\vee\colon R\Gamma_c(G_\mathbb{R}, X(\mathbb{C}), (2\pi i)^n\, \mathbb{R})[-1] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{RHom}(R\Gamma(X_{ét}, \mathbb{Z}^c(n)), \mathbb{R}).$$

Con esta conjetura y la escisión del complejo Weil-étale con coeficientes reales, se obtiene un complejo acíclico de espacios vectoriales

$$\cdots \to H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\smile\theta} H^{i+1}_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R} \to \cdots$$

que nos da un isomorfismo canónico

$$\lambda\colon \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} (\det_\mathbb{Z} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)) \otimes \mathbb{R},$$

donde $\det_\mathbb{Z}$ es el determinante de complejos en el sentido de Knudsen y Mumford (1976). Este es nada más un $\mathbb{Z}$-módulo de rango 1, y la aplicación de arriba lo encaja como un retículo en $\mathbb{R}$, lo que no suena como una gran cosa, pero el encajamiento en cuestión es canónico.

Ahora estamos listos para formular la conjetura principal.

Conjetura C(X, n)**.** *Asumiendo* $\mathbf{L}^c(X_{ét}, n)$, $\mathbf{B}(X, n)$ *y que* $\zeta_X(s)$ *tiene una prolongación meromorfa alrededor de* $s = n < 0$, *el valor especial correspondiente viene dado por*

$$\lambda(\zeta_X^*(n)^{-1}) \cdot \mathbb{Z} = \det_\mathbb{Z} R\Gamma_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n))$$

(esto define el valor salvo el signo), y el orden de anulación es la "característica de Euler secundaria" [*]

$$\operatorname{ord}_{s=n} \zeta_X(s) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \cdot i \cdot \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H^i_{W,c}(X, \mathbb{Z}(n)).$$

7 ¿A qué sirve todo esto?

Entonces, asumiendo varias conjeturas que están fuera de alcance, hemos formulado otra conjetura más... Esto se ve bastante deprimente, pero nuestro formalismo puede dar algunos frutos.

- Si $U \to X \leftarrow Z$ es una descomposición abierto-cerrada, entonces está claro que la función zeta cumple
$$\zeta_X(s) = \zeta_U(s) \cdot \zeta_Z(s).$$
Resulta que para nuestra conjetura,
$$\mathbf{C}(X, n) \iff \mathbf{C}(U, n) + \mathbf{C}(Z, n).$$
- Tampoco es difícil ver que para el espacio afín relativo
$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^r_X \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^r \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$
se tiene
$$\zeta_{\mathbb{A}^r_X}(s) = \zeta_X(s - r).$$
Y resulta que para nuestra conjetura,
$$\mathbf{C}(\mathbb{A}^r_X, n) \iff \mathbf{C}(X, n - r).$$

La conjetura $\mathbf{C}(X, n)$ se conoce para ciertos casos bien especiales, pero usando las dos operaciones de arriba uno puede producir más esquemas para cuales la conjetura todavía no era conocida.

[*] Notamos que la característica de Euler secundaria no es aditiva para triángulos:

$$A \to B \to C \not\Longrightarrow \chi_{sec}(B) = \chi_{sec}(A) + \chi_{sec}(C),$$

pero este invariante surge en varios contextos naturales (incluso topológicos) cuando se trata de complejos acíclicos.