Introducción al lenguaje funtorial

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

> ...mathematics will perish before the end of this century if the present trend for senseless abstraction—I call it: theory of the empty set—cannot be blocked up.
>
> Carta de Siegel a Mordell sobre el libro de Lang "Diophantine Geometry" (1964)

En los presentes apuntes no vamos a estudiar la teoría de categorías como tal, sino que veremos algunas definiciones básicas e indispensables para cursos de álgebra y geometría.

La literatura adicional recomendada son los libros de texto [Lei2014] y [Rie2017], el libro clásico [ML1998] (escrito por uno de los fundadores de la teoría) y el manual en tres volúmenes [Bor1994a, Bor1994b, Bor1994c]. El lector interesado en la perspectiva histórico-filosófica, puede consultar [Mar2009] y [Kro2007].

Índice

1 Definición de categoría

1.1. Definición. Una **categoría** $\mathscr{C}$ está definida por los siguientes datos.

1) Una clase de **objetos** $\operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ que vamos a denotar por las letras $X, Y, Z, \ldots$

2) Conjuntos $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ de **morfismos** $f\colon X \to Y$ para cada par de objetos fijos $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$.

3) Una ley de composición de morfismos

$$\begin{aligned} \circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z) &\to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z), \\ (f,g) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Estos datos tienen que satisfacer los siguientes axiomas.

i) Para cada objeto X existe el morfismo identidad $\operatorname{id}_X\colon X \to X$ que se comporta como la identidad respecto a la composición:

$$(X \xrightarrow{f} Y) \circ (X \xrightarrow{\operatorname{id}_X} X) = (X \xrightarrow{f} Y),$$
$$(Y \xrightarrow{\operatorname{id}_Y} Y) \circ (X \xrightarrow{f} Y) = (X \xrightarrow{f} Y).$$

ii) La composición es asociativa: para cualesquiera $X, Y, Z, W \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ y $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ se cumple

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

1.2. Comentario. Hemos dicho que tenemos una *clase* de objetos porque normalmente los objetos no forman un conjunto sino un “conjunto grande”. El ejemplo más básico es la categoría donde los objetos son conjuntos y los morfismos $X \to Y$ son aplicaciones entre conjuntos. Todos los conjuntos no forman un conjunto. Por esto en una categoría se trata de una *clase* de objetos. Cuando los objetos forman un conjunto, se dice que $\mathscr{C}$ es una categoría **pequeña**. La mayoría de las categoría interesantes que aparecen en la naturaleza no son pequeñas.

1.3. Definición. Se dice que una categoría $\mathscr{C}$ es una **subcategoría** de $\mathscr{D}$ si

1) los objetos de $\mathscr{C}$ forman una subclase de los objetos de $\mathscr{D}$: para todo $X \in \operatorname{Ob} C$ se tiene $X \in \operatorname{Ob} D$;

2) los morfismos en $\mathscr{C}$ son también morfismos en $\mathscr{D}$: se tiene $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$;

3) la composición de morfismos en $\mathscr{C}$ es la misma que en $\mathscr{D}$.

Si además $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y)$ para cualesquiera $X, Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$, entonces se dice que $\mathscr{C}$ es una **subcategoría plena** de $\mathscr{D}$.

1.4. Ejemplo. He aquí algunos ejemplos básicos de categorías que ya conocemos bien.

categoría	objetos	morfismos
Set	conjuntos	aplicaciones entre conjuntos
Top	espacios topológicos	aplicaciones continuas
Haus	espacios topológicos Hausdorff	aplicaciones continuas
Grp	grupos	homomorfismos de grupos
Ab	grupos abelianos	homomorfismos de grupos
Ring	anillos	homomorfismos de anillos
CRing	anillos conmutativos	homomorfismos de anillos
k-**Vect**	espacios vectoriales sobre un cuerpo k	aplicaciones k-lineales
k-**vect**	espacios vectoriales de dimensión finita sobre k	aplicaciones k-lineales
…	…	…

Todas las categorías de arriba pueden ser interpretadas como subcategorías de **Set**: sus objetos son conjuntos con cierta estructura especial y los morfismos son aplicaciones que preservan las estructuras. La categoría **Ab** es una subcategoría plena de **Grp**, la categoría de anillos conmutativos **CRing** es una subcategoría plena de la categoría de todos los anillos **Ring**. La categoría **Haus** es una subcategoría plena de **Top**.

Los espacios vectoriales de dimensión finita forman una subcategoría plena k-**vect** $\subset k$-**Vect**. ▲

1.5. Ejemplo. Un **conjunto preordenado** es un conjunto X dotado de una relación $\preceq$ que satisface los siguientes axiomas.

P1) La relación es **simétrica**: se tiene $x \preceq x$ para todo $x \in X$.

P2) La relación es **transitiva**: si $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$.

En este caso se puede definir una categoría donde los objetos son los elementos de X y los morfismos son

$$\operatorname{Hom}(x,y) := \begin{cases} \{x \to y\}, & \text{si } x \preceq y, \\ \emptyset, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El axioma P1) nos da los morfismos identidad, mientras que el axioma P2) nos permite componer los morfismos. ▲

1.6. Ejemplo. Si X es un espacio topológico, se puede definir la categoría **Abiertos**(X) donde los objetos son los subconjuntos abiertos $U \subseteq X$ y los morfismos son

$$\operatorname{Hom}(U,V) := \begin{cases} \{U \to V\}, & \text{si } U \subseteq V, \\ \emptyset, & \text{en caso contrario.} \end{cases}.$$

▲

1.7. Ejemplo. Los espacios métricos forman una categoría **Met**. Un objeto de esta categoría es un conjunto X dotado de una distancia $d_X\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface los axiomas habituales. Los morfismos $f\colon X \to Y$ son las aplicaciones que preservan la métrica en el sentido de que

$$d_Y(f(x), f(y)) \le d_X(x,y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. A veces se considera la categoría más grande **Lipsch** donde los morfismos son las **aplicaciones Lipschitz**. Una aplicación $f\colon X \to Y$ es Lipschitz si existe una constante $C > 0$ tal que

$$d_Y(f(x), f(y)) \le C\, d_X(x,y)$$

para cualesquiera $x, y \in X$. Note que **Met** es una subcategoría de **Lipsch**. Puesto que toda aplicación Lipschitz es continua, la categoría **Lipsch** puede ser vista como una subcategoría de **Top**. ▲

1.8. Ejemplo. Sea G un grupo fijo y X un conjunto. Se dice que G **actúa** sobre X por la izquierda, o que X es un G-**conjunto** si está definida una aplicación

$$\begin{aligned} G \times X &\to X, \\ (g,x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

que satiface

1) $1 \cdot x = x$ para todo $x \in X$,

2) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ para cualesquiera $g, h \in G$ y $x \in X$.

Un morfismo de G-conjuntos es una aplicación $f: X \to Y$ que es compatible con la acción de G: se cumple $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para cualesauiera $g \in G$ y $x \in X$. En otras palabras, se pide que el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r, "\mathrm{id} \times f"] \arrow[d] & G \times Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Esto nos da una categoría G-**Set**. ▲

La aceptación del lenguaje categórico se debe a que casi todas las estructuras en álgebra y geometría dan lugar a categorías, y muchas propiedades básicas son consecuencias formales de la teoría de categorías.

2 Isomorfismos, monomorfismos y epimorfismos

2.1. Definición. Sea $f: X \to Y$ un morfismo en cualquier categoría.

1) f es un **isomorfismo** si existe otro morfismo $f^{-1}: Y \to X$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$. (Ejercicio: si existe, este f^{-1} es únicamente definido por f.) En este caso escribimos $X \cong Y$.

2) f es un **monomorfismo** si para todo par de morfismos $g, g': Z \to X$ tenemos

$$f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g';$$

en otras palabras, si para todo $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ la aplicación

$$\begin{aligned} f_*: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, Y), \\ g &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

es inyectiva.

3) f es un **epimorfismo** si para todo par de morfismos $g, g': Y \to Z$ tenemos

$$g \circ f = g' \circ f \Rightarrow g = g';$$

en otras palabras, si para todo $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ la aplicación

$$\begin{aligned} f^*: \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, Z) &\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Z), \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

es inyectiva.

Un monomorfismo se denota por $\rightarrowtail$ y un epimorfismo se denota por $\twoheadrightarrow$.

2.2. Ejemplo. A todo grupo G se puede asociar una categoría **BG** donde hay un solo objeto $*$, hay un morfismo $g: * \to *$ por cada elemento $g \in G$ y la composición $g \circ f$ corresponde al producto $gf \in G$. En la categoría **BG** todos los morfismos son isomorfismos. Recíprocamente, una categoría donde hay solo un objeto y todos los morfismos son invertibles corresponde a un grupo.

Si no asumimos la existencia de morfismos inversos, una categoría con un objeto corresponde a un **monoide**. Una categoría donde todas las flechas son invertibles, pero puede haber más de un objeto, corresponde a un **grupoide**. Los grupoides tienen papel fundamental en la topología algebraica: en lugar del **grupo fundamental** $\pi_1(X, x_0)$ (construido a partir de un punto fijo $x_0 \in X$) es más natural considerar el **grupoide fundamental** $\Pi_1(X)$ (sin fijar $x_0 \in X$). ▲

2.3. Observación. *Las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.*

1) *Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es un isomorfismo.*
2) *Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es un monomorfismo.*
3) *Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es un epimorfismo.*
4) *Si para $m\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.*
5) *Si para $f\colon X \to Y$, $e\colon Y \to Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.*

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

2.4. Observación. *Todo isomorfismo es automáticamente mono y epi.*

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

2.5. Ejemplo. En la categoría **Set** los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente. ▲

En cualquier categoría donde los objetos son conjuntos con estructura adicional, y los morfismos son aplicaciones que preservan esta estructura, un morfismo $f\colon X \to Y$ que es inyectivo en los conjuntos subyacentes es un monomorfismo, y un morfismo $f\colon X \to Y$ que es sobreyectivo en los conjuntos subyacentes es un epimorfismo. El recíproco no siempre se cumple: puede haber monomorfismos no inyectivos y epimorfismos no sobreyectivos.

2.6. Ejemplo. En la categoría de anillos **Ring** (resp. anillos conmutativos **CRing**) los isomorfismos son precisamente los homomorfismos biyectivos. En efecto, si tenemos un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ que es biyectivo, entonces la aplicación inversa $f^{-1}\colon S \to R$ es automáticamente un homomorfismo de anillos.

Los monomorfismos de anillos (resp. anillos conmutativos) son precisamente los homomorfismos inyectivos. Por ejemplo, sea $f\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos que *no es* inyectivo. Esto quiere decir que $f(x) = f(x')$ para diferentes $x, x' \in R$. Definamos dos homomorfismos

$$g\colon \mathbb{Z}[X] \to R, \quad X \mapsto x$$

y

$$g'\colon \mathbb{Z}[X] \to R, \quad X \mapsto x'$$

(el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[X]$ tiene la siguiente propiedad particular: para cualquier anillo R un homomorfismo $\mathbb{Z}[X] \to R$ se define de manera única por la imagen de X y esta puede ser cualquier elemento de R). Luego tenemos $f \circ g = f \circ g'$, aun cuando $g \ne g'$. Esto demuestra que f no es un monomorfismo.

Sin embargo, no todo epimorfismo de anillos (resp. anillos conmuativos) es necesariamente sobreyectivo. Consideremos por ejemplo la inclusión $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Supongamos que $g \circ f = g' \circ f$ para algunos homomorfismos de anillos $g, g'\colon \mathbb{Q} \to R$. Luego, para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ se tiene

$$\begin{aligned} g\left(\frac{a}{b}\right) &= g(a) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) = g'(a) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) = g'\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) = g'\left(\frac{a}{b}\right) \cdot g'(b) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) \\ &= g'\left(\frac{a}{b}\right) \cdot g(b) \cdot g\left(\frac{1}{b}\right) = g'\left(\frac{a}{b}\right) \cdot g\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = g'\left(\frac{a}{b}\right) \cdot g(1) = g'\left(\frac{a}{b}\right). \end{aligned}$$

Entonces, $g = g'$. Esto nos da un ejemplo de un morfismo que es epi y mono pero no es iso. ▲

2.7. Ejemplo. Sería interesante ver algún ejemplo de un monomorfismo que no es inyectivo. Recordemos que grupo A es **divisible** si para todo $x \in A$ y para todo $n = 1,2,3,\ldots$ existe $y \in A$ tal que

$$n\,y := \underbrace{y + \cdots + y}_{n} = x.$$

Por ejemplo, el grupo aditivo $\mathbb{Q}$ es divisible. Por otro lado, para todo homomorfismo de grupos abelianos $f\colon A \to B$ donde A es divisible, se cumple que la imagen $\operatorname{im} f$ es también un grupo divisible. Esto implica que si A es divisible, todo cociente A/B es divisible. Por ejemplo, el grupo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es divisible.

Esto nos da la categoría **AbDiv** de grupos abelianos divisibles, que es una subcategoría plena de la categoría **Ab**. Dentro de esta categoría podemos considerar el homomorfismo canónico $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Sea A otro grupo divisible y sean $g, g'\colon A \to \mathbb{Q}$ dos homomorfismos tales que $f \circ g = f \circ g'$. Afirmamos que $g = g'$. En efecto, supongamos que $g \ne g'$, es decir $h := g - g' \ne 0$, mientras que $f \circ h = 0$. Entonces, existe algún $x \in A$ tal que $h(x) \ne 0$. Sin pérdida de generalidad, $h(x) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ es un entero positivo (en el caso contrario podemos reemplazar x por $-x$ o multiplicarlo por un entero). Gracias a la divisibilidad de A, existe algún $y \in A$ tal que

$$2 \cdot h(x) \cdot y = x.$$

Aplicando h a la igualdad anterior, se obtiene la siguiente igualdad en $\mathbb{Q}$:

$$2 \cdot h(x) \cdot h(y) = h(x).$$

De aquí se sigue que $h(y) = 1/2$. Por tanto $f(h(y)) \ne 0$ en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, lo que contradice el hecho de que $f \circ h = 0$. ▲

2.8. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** (resp. grupos abelianos **Ab**) los isomorfismos son precisamente los homomorfismos biyectivos. Si $f\colon G \to H$ es un homomorfismo biyectivo de grupos, entonces la aplicación inversa $f^{-1}\colon H \to G$ es automáticamente un homomorfismo.

Los monomorfismos de grupos (resp. grupos abelianos) son los homomorfismos inyectivos. En efecto, si $f\colon G \to H$ no es inyectivo, entonces $f(x) = f(x')$ para diferentes $x, x' \in G$. Podemos considerar los homomorfismos

$$g\colon \mathbb{Z} \to G, \quad 1 \mapsto x$$

y

$$g'\colon \mathbb{Z} \to G, \quad 1 \mapsto x'$$

(todo homomorfismo de grupos $\mathbb{Z} \to G$ está definido de modo único por la imagen de 1 que puede ser cualquier elemento de G). Ahora, $f \circ g = f \circ g'$, aunque $g \ne g'$, así que f no es un monomorfismo.

Los epimorfismos de grupos (resp. grupos abelianos) son precisamente los homomorfismos sobreyectivos; esto no es tan fácil y no lo voy a probar*. En la categoría de grupos abelianos **Ab** funciona el siguiente truco. Sea $f\colon A \to B$ un homomorfismo de grupos abelianos que no es sobreyectivo. Lo último significa que $\operatorname{im} f \ne B$ y $B/\operatorname{im} f \ne 0$. Podemos considerar el homomorfismo $p\colon B \to B/\operatorname{im} f$ (la proyección sobre el grupo cociente) y el homomorfismo nulo $0\colon B \to B/\operatorname{im} f$ que aplica todo en 0. Luego, $p \circ f = 0 \circ f$, aunque $p \ne 0$, así que f no es un epimorfismo. Para los grupos no abelianos, este argumento falla: para un homomorfismo $f\colon G \to H$ la imagen $\operatorname{im} f$ no tiene por qué ser un subgrupo normal de G si G no es abeliano. ▲

2.9. Ejemplo. Los isomorfismos en la categoría **Top** de espacios topológicos tienen nombre especial: son los **homeomorfismos**. Note que no son simplemente morfismos biyectivos: una aplicación continua $f\colon X \to Y$ puede tener una aplicación inversa $f^{-1}\colon Y \to X$ que no es continua.

Los monomorfismos de espacios topológicos son precisamente las aplicaciones continuas inyectivas. En efecto, dada una aplicación continua $f\colon X \to Y$ tal que $f(x) = f(x')$ para algunos $x \ne x'$, podemos considerar el espacio unipuntual $\{*\}$ y dos aplicaciones $g, g'\colon \{*\} \to X$ dadas por

$$g\colon * \mapsto x, \quad g'\colon * \mapsto x'.$$

*Véase por ejemplo *Linderholm, C.E. A group epimorphism is surjective. Amer. Math. Monthly 77, pp. 176–177.*

Tenemos $g \circ f = g' \circ f$, mientras que $g \neq g'$.

Los epimorfismos de espacios topológicos son las aplicaciones continuas sobreyectivas. Para verlo, consideremos una aplicación continua $f\colon X \to Y$ tal que $\operatorname{im} f \neq Y$. Sea $\{0,1\}$ el espacio topológico de dos puntos dotado de la topología trivial (indiscreta). Sea $g\colon Y \to \{0,1\}$ la aplicación que envía todo en 1 y sea $g'\colon Y \to \{0,1\}$ la aplicación definida por

$$g'(y) := \begin{cases} 1, & y \in \operatorname{im} f, \\ 0, & y \notin \operatorname{im} f. \end{cases}$$

Ambas aplicaciones g y g' son continuas, puesto que la topología sobre $\{0,1\}$ es trivial. Ahora $g \circ f = g' \circ f$, pero $g \neq g'$. ▲

2.10. Ejemplo. Consideremos ahora la categoría **Haus** de espacios Hausdorff. El mismo argumento de arriba demuestra que los monomorfismos son precisamente las aplicaciones continuas inyectivas. Sin embargo, el argumento sobre los epimorfismos no funciona: el espacio $\{0,1\}$ con la topología indiscreta no es Hausdorff.

En realidad, los epimorfismos en **Haus** son las aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ con imagen densa (es decir, $\overline{\operatorname{im} f} = Y$). Efectivamente, si $f\colon X \to Y$ es una aplicación continua con esta propiedad, entonces si dos aplicaciones $g, g'\colon Y \to Z$ satisfacen $g \circ f = g' \circ f$, estas coinciden sobre $\operatorname{im} f$, y por ende $g = g'$. Aquí estamos usando la siguiente propiedad: cuando $g, g'\colon Y \to Z$ son dos aplicaciones continuas, Y es Hausdorff y g y g' coinciden sobre un subconjunto denso de Y, entonces $g = g'$.

En la otra dirección, dado un epimorfismo $f\colon X \to Y$ entre dos espacios de Hausdorff, se puede comprobar que $\overline{\operatorname{im} f} = Y$, pero el argumento es un poco más sutíl[*] y prefiero omitirlo. ▲

2.11. Ejemplo. En la categoría k-**Vect** de espacios vectoriales sobre k, los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente. ▲

3 Funtores entre categorías

> Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets
>
> Poincaré

Para relacionar diferentes categorías, sirve la noción de funtor.

3.1. Definición. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor (covariante)** $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una regla que

1) a cada objeto X de $\mathscr{C}$ asigna un objeto $F(X)$ de $\mathscr{D}$,

2) a cada morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathscr{C}$ asigna un morfismo $F(f) =: f_*\colon F(X) \to F(Y)$ en $\mathscr{D}$;

de modo que se cumplen los siguientes axiomas:

a) F preserva los morfismos identidad: $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{F(X)}$ para cada X;

b) F preserva la composición de morfismos: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

3.2. Observación. *Si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ y F es un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$.*

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

[*] Véase http://math.stackexchange.com/questions/214045/

3.3. Observación. *Si $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ son dos funtores, entonces la composición $G \circ F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ (definida como la aplicación de F seguida por la aplicación de G) es también un funtor. Esta composición es asociativa. También para cada categoría tenemos el funtor identidad $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ (que aplica un objeto X en el mismo objeto X y un morfismo f en el mismo morfismo f). Esto es la identidad respecto a la composición de funtores.*

3.4. Comentario. Intuitivamente, todo esto significa que las categorías forman una categoría donde los objetos son categorías y los morfismos son funtores entre ellas. Sin embargo, hay un pequeño detalle fastidioso: según nuestra definición, para dos objetos fijos X e Y los morfismos $X \to Y$ forman un conjunto. Sin embargo, los objetos de una categoría no necesariamente forman un conjunto y por esto para dos categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ los funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ no necesariamente forman un conjunto.

Sin embargo, las categorías pequeñas (véase 1.2) forman una categoría. Esta se denota por **Cat**.

3.5. Ejemplo. Sea $\mathscr{C}$ una categoría y X un objeto fijo. Para cada objeto Y podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:

$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y).$$

Cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ induce una aplicación f_* definida por la composición con f:

$$(Y \xrightarrow{f} Y') \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y')).$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "f\circ g"'] & Y \arrow[dl, "f"] \\
Y' &
\end{tikzcd}$$

Todo esto define un funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$$

—el morfismo identidad $\mathrm{id}\colon Y \to Y$ obviamente induce el morfismo identidad

$$\mathrm{id}_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$$

y para la composición de morfismos $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{f'} Y''$ tenemos $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$. ▲

3.6. Ejemplo. Para los espacios vectoriales sobre k, las aplicaciones k-lineales $U \to V$ también forman un espacio vectorial sobre k, y en este caso se tiene un funtor

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(U,-)\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}.$$

—escribimos "$\underline{\mathrm{Hom}}_k$" en lugar de "$\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Vect}}$" para subrayar que los valores no están en **Set**, sino en k-**Vect**. ▲

3.7. Ejemplo. Hay una serie de funtores tontos pero muy importantes: los **funtores olvidadizos**. Estos funtores olvidan una parte de la estructura. Por ejemplo, todo espacio topológico, grupo, anillo, espacio vectorial, G-conjunto, etc. es un conjunto. Esto nos da funtores como

$$\mathbf{Top} \to \mathbf{Set}, \quad \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}, \quad \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}, \quad k\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}, \quad G\text{-}\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, \quad \text{etc.}$$

que asignan a cada objeto el conjunto subyacente y a cada morfismo la aplicación entre conjuntos correspondiente.

También se puede olvidar solo una parte de la estructura: por ejemplo, olvidar que un espacio es Hausdorff, que un grupo es abeliano, que un anillo es conmutativo, que en un espacio vectorial hay una multiplicación por escalares:

$$\mathbf{Haus} \to \mathbf{Top}, \quad \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}, \quad \mathbf{CRing} \to \mathbf{Ring}, \quad k\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Ab}, \quad \text{etc.}$$ ▲

3.8. Ejemplo. Sea k un cuerpo. A partir de un conjunto X se puede considerar el espacio vectorial $k\langle X\rangle$ generado por los elementos de X. Esto define un funtor

$$\mathbf{Set} \to k\text{-}\mathbf{Vect}.$$

En efecto, cada aplicación entre conjuntos $X \to Y$ induce *de modo funtorial* la aplicación k-lineal correspondiente $k\langle X\rangle \to k\langle Y\rangle$. ▲

3.9. Ejemplo. Para un anillo R consideremos el grupo de unidades (elementos invertibles) $R^\times$. Es fácil comprobar que para todo homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ se cumple $f(R^\times) \subseteq S^\times$, así que tenemos un funtor

$$(-)^\times\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Grp}.$$ ▲

3.10. Ejemplo. Si consideramos grupos como categorías (véase 2.2), funtores corresponden a homomorfismos. ▲

3.11. Ejemplo. En topología algebraica, a cada espacio X se puede asociar el conjunto $\pi_0(X)$ formado por las componentes conexas (por caminos). Esto es un funtor $\pi_0\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$: una aplicación continua $X \to Y$ necesariamente envia los puntos de la misma componente conexa de X a la misma componente conexa de Y.

El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es un funtor $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$. Aquí $\mathbf{Top}_*$ es la categoría cuyos objetos son los **espacios topológicos con un punto marcado**; es decir, pares (X, x_0) donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$. Los morfismos $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ en esta categoría son las aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Resulta que el grupo fundamental es un invariante **homotópico** de (X, x_0). Esto puede ser expresado diciendo que π_1 es un funtor definido sobre la categoría $\mathbf{HoTop}_*$ donde los objetos son los mismos, pero los morfismos son las clases de equivalencia homotópica de aplicaciones continuas $(X, x_0) \to (Y, y_0)$.

Si queremos deshacernos de la elección del punto marcado, hay que considerar el funtor del grupoide fundamental Π_1 que a cada espacio asocia un grupoide.

También se pueden definir los **grupos de homotopía superiores** $\pi_n(X, x_0)$ para cualquier $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ En este caso son todos grupos abelianos, y se trata de una serie de funtores $\pi_n\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab}$ o $\mathbf{HoTop}_* \to \mathbf{Ab}$. Sin embargo, el cálculo de estos grupos es extremadamente difícil incluso para espacios sencillos como las esferas: la estructura de los grupos $\pi_n(S^k, *)$ es un problema muy profundo de matemáticas, sin respuesta sencilla y completa.

Los grupos de **homología** $H_n(X)$ y **cohomología** $H_n(X; A)$ (donde A es el **grupo de coeficientes**) son invariantes homotópicos más manejables y son también funtores $\mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab}$ o $\mathbf{HoTop}_* \to \mathbf{Ab}$. ▲

Muy a menudo es útil considerar funtores que cambian la dirección de los morfismos.

3.12. Definición. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías. Un **funtor contravariante** $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una regla que a cada objeto X de $\mathscr{C}$ asigna un objeto $F(X)$ de $\mathscr{D}$, y a cada morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathscr{C}$ asigna un morfismo $F(f) =: f^*\colon F(Y) \to F(X)$ en $\mathscr{D}$, de modo que

$$\mathrm{id}_X^* = \mathrm{id}_{F(X)}, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Para tratar los funtores covariantes y contravariantes de la misma manera, es útil introducir la noción de categoría opuesta.

3.13. Definición. Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Entonces su **categoría opuesta** $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es la categoría donde los objetos son los mismos, pero un morfismo $f^{\mathrm{op}}\colon X \to Y$ en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ es un morfismo $f\colon Y \to X$ en $\mathscr{C}$ y la composición está definida por

$$g^{\mathrm{op}} \circ f^{\mathrm{op}} := (f \circ g)^{\mathrm{op}}.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}^{\mathrm{op}}\colon & X \arrow[r, "f^{\mathrm{op}}"'] \arrow[rr, bend left, "g^{\mathrm{op}}\circ f^{\mathrm{op}}"] & Y \arrow[r, "g^{\mathrm{op}}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}\colon & X & Y \arrow[l, "f"'] & Z \arrow[l, "g"'] \arrow[ll, bend left, "f\circ g"]
\end{tikzcd}$$

3.14. Observación. *Un funtor contravariante $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ puede ser visto como un funtor covariante $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ o $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$.*

3.15. Comentario. Muy a menudo se dice que un funtor F es contravariante y se escribe $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{D}$ para subrayar que es contravariante. En realidad, como funtor definido sobre $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$, es covariante.

3.16. Ejemplo. Sea $\mathscr{C}$ una categoría e Y un objeto fijo. Para cada objeto X podemos considerar el conjunto de morfismos $X \to Y$:

$$Y \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y).$$

Cada morfismo $f\colon X \to X'$ induce una aplicación f^* por la composición con f. Notemos que el único modo sensato de definirla es de tomar un morfismo $g\colon X' \to Y$ y componerlo con $f\colon X \to X'$:

$$(X \xrightarrow{f} X') \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', Y) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)).$$

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, dashed, "g\circ f"'] \arrow[dl, "f"] \\
X' \arrow[u, "g"] &
\end{tikzcd}$$

Vemos que esto define un funtor

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-, Y)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}.$$ ▲

3.17. Ejemplo. Para dos conjuntos preordenados X y Y considerados como categorías (véase 1.5) un funtor es una aplicación $f\colon X \to Y$ que preserva la relación $\preceq$. ▲

3.18. Ejemplo. En 1.6 asociamos a todo espacio topológico X la categoría $\mathbf{Abiertos}(X)$. Si tenemos una aplicación continua $f\colon X \to Y$, entonces por la definición, $f^{-1}(U)$ es abierto en X para todo abierto $U \subseteq Y$. Esto define un funtor $f^{-1}\colon \mathbf{Abiertos}(Y) \to \mathbf{Abiertos}(X)$. ▲

3.19. Ejemplo. Para los espacios vectoriales sobre k, tenemos un funtor

$$\underline{\mathrm{Hom}}_k(-, V)\colon k\text{-}\mathbf{Vect}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{Vect}.$$

En particular, el espacio vectorial dual define un funtor

$$(-)^* := \underline{\mathrm{Hom}}_k(-, k)\colon k\text{-}\mathbf{Vect}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{Vect}.$$ ▲

3.20. Observación. *La composición de dos funtores contravariantes es un funtor covariante.*

Demostración. La dirección de los morfismos cambia a la opuesta dos veces.

A saber, si tenemos dos funtores contravariantes $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, estos pueden ser vistos como funtores $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}^{\mathrm{op}}$ y $G\colon \mathscr{D}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{E}$. Al componerlos, nos queda un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$. ■

3.21. Ejemplo. El funtor del espacio doble dual

$$(-)^{**} := (-)^* \circ (-)^*\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$$

es covariante. ▲

3.22. Definición. Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor. Para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ podemos considerar la aplicación de conjuntos

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X), F(Y)),\\ f \mapsto F(f).\end{gathered}$$

1) Si la aplicación de arriba es inyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, se dice que F es **fiel**.

2) Si es sobreyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, se dice que F es **pleno**.

3) Si es biyectiva para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, se dice que F es **fielmente pleno** o bien **fiel y pleno**[*].

3.23. Ejemplo. El funtor olvidadizo k-**Vect** → **Set** es fiel: diferentes morfismos entre espacios vectoriales corresponden a diferentes aplicaciones entre conjuntos.

El funtor olvidadizo **Ab** → **Grp** es fiel y pleno: un homomorfismo de grupos abelianos es un homomorfismo de grupos.

Si consideramos grupos como categorías (véase 2.2), funtores fieles, plenos y fielmente plenos corresponden a monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos. ▲

Hay miles de ejemplos interesantes de funtores. Toda construcción buena y canónica corresponde a un funtor.

4 Transformaciones naturales entre funtores

> If topology were publicly defined as the study of families of sets closed under finite intersection and infinite unions a serious disservice would be perpetrated on embryonic students of topology. The mathematical correctness of such a definition reveals nothing about topology except that its basic axioms can be made quite simple. And with the category theory we are confronted with the same pedagogical problem. The basic axioms <...> are much too simple.
> A better (albeit not perfect) description of topology is that it is the study of continuous maps; and category theory is likewise better described as the theory of functors. <...> It is not too misleading, at least historically, to say that categories are what one must define in order to define functors, and that functors are what one must define in order to define natural transformations.
>
> Peter Freyd, introducción al libro “Abelian categories” (1964)

Resumamos nuestra situación. En las matemáticas clásicas normalmente se estudiaban conjuntos dotados de cierta estructura. Por ejemplo, un espacio vectorial sobre k es un conjunto con estructura de grupo abeliano y multiplicación por los elementos de k que satisfacen ciertos axiomas, etc. El punto de vista categórico supone que, en vez de estudiar elementos de cada objeto, hay que estudiar las aplicaciones entre objetos. La definición de categorías no menciona elementos que “pertenecen” a objetos y en realidad no habla de aplicaciones: se trata solo de algunas flechas $X \to Y$ que se pueden componer formalmente. Otro

[*] “Fully faithful” o “full and faithful” en inglés.

nivel de razonamiento es de dar más importancia no a las categorías particulares, sino a los funtores entre categorías. Pero en realidad, la noción más importante no es la de categoría ni la de funtor, sino la de morfismo entre funtores; estas son las transformaciones naturales.

4.1. Definición. Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ dos categorías y sean $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ dos funtores entre ellas. Una **transformación natural** $\alpha\colon F \Rightarrow G$ entre F y G es una colección de morfismos $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ en $\mathscr{D}$ para cada objeto X de $\mathscr{C}$, tal que para cada morfismo $X \to Y$ en $\mathscr{C}$ el siguiente diagrama en $\mathscr{D}$ es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Si F y G son dos funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, vamos a usar la notación

$$\operatorname{Nat}(F, G) := \{\text{transformaciones naturales } F \Rightarrow G\}.$$

En general $\operatorname{Nat}(F, G)$ no es un conjunto porque a priori los objetos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ no forman conjuntos.

4.2. Observación. *Si F, G, H son tres funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\beta\colon G \Rightarrow H$ son transformaciones naturales, entonces la composición $\beta \circ \alpha\colon F \Rightarrow H$ definida como*

$$(\beta \circ \alpha)_X := \beta_X \circ \alpha_X$$

es también una transformación natural:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "G(f)"] & H(X) \arrow[d, "H(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \arrow[r, "\beta_Y"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

Además, para cada funtor F existe la transformación natural identidad $\mathrm{Id}_F\colon F \Rightarrow F$ definida por $(\mathrm{Id}_F)_X := F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ para todo X. Es la identidad respecto a la composición de transformaciones naturales.

Todo esto nos permite decir cuándo dos funtores son isomorfos.

4.3. Definición. Se dice que dos funtores $F, G\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ son **isomorfos** si existen transformaciones naturales $\alpha\colon F \Rightarrow G$ y $\alpha^{-1}\colon G \Rightarrow F$ tales que $\alpha^{-1} \circ \alpha = \mathrm{Id}_F$ y $\alpha \circ \alpha^{-1} = \mathrm{Id}_G$.

La situación de arriba es equivalente a tener una transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ donde cada $\alpha_X\colon F(X) \to G(X)$ es un isomorfismo.

4.4. Ejemplo. Para un espacio vectorial U tenemos la aplicación de evaluación que va de U a su doble dual:

$$\begin{aligned} ev_U\colon U &\to U^{**}, \\ u &\mapsto (\phi \mapsto \phi(u)). \end{aligned}$$

Esta aplicación es natural en el sentido de que define una transformación natural entre el funtor identidad sobre k-**Vect** y el funtor $(-)^{**}\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$. En efecto, dado una aplicación lineal $f\colon U \to V$, esta induce primero la aplicación

$$\begin{aligned} f^*\colon V^* &\to U^*, \\ (\phi\colon V \to k) &\mapsto (\phi \circ f\colon U \to k). \end{aligned}$$

Luego, pasando otra vez a espacios duales, se obtiene

$$f^{**}\colon U^{**} \to V^{**},$$
$$(\phi\colon U^* \to k) \mapsto (\phi \circ f^*\colon V^* \to k).$$

Tenemos que comprobar que el siguiente cuadrado conmuta:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "ev_U"] \arrow[d, "f"'] & U^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ V \arrow[r, "ev_V"'] & V^{**} \end{tikzcd}$$

De hecho, ambas aplicaciones $ev_V \circ f$ y $f^{**} \circ ev_U$ asocian a un vector $u \in U$ el mismo elemento de V^{**} dado por

$$\phi \mapsto \phi(f(u)).$$

▲

4.5. Ejemplo. Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathrm{GL}_n(R)$ el grupo de las matrices invertibles de $n \times n$ con coeficientes en R. Un homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ induce de modo funtorial un homomorfismo de grupos

$$\mathrm{GL}_n(f)\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S).$$

En otras palabras, se aplica f a cada entrada de una matriz. Entonces, tenemos un funtor

$$\mathrm{GL}_n\colon \mathbf{CRing} \to \mathbf{Grp}.$$

Una matriz es invertible si y solamente si su determinante es invertible, y el determinante es un homomorfismo de grupos

$$\det\colon \mathrm{GL}_n(R) \to R^\times.$$

Además, el determinante es natural en el sentido de que cada homomorfismo de anillos $f\colon R \to S$ induce un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det_R"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & R^\times \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{GL}_n(S) \arrow[r, "\det_S"'] & S^\times \end{tikzcd}$$

En conclusión, el determinante define una transformación natural entre los funtores

$$\mathrm{GL}_n, (-)^\times\colon \mathbf{CRing} \to \mathbf{Grp}.$$

▲

4.6. Ejemplo. Tenemos funtores $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ y $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Cada morfismo

$$X \to X' \quad \text{y} \quad Y \to Y'$$

induce transformaciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-) \quad \text{y} \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y').$$

Por ejemplo, en el primer caso, tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X' \to Y) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (X \to X' \to Y) \arrow[d, mapsto] \\ (X' \to Y \to Y') \arrow[r, mapsto] & (X \to X' \to Y \to Y') \end{tikzcd}$$

y el segundo caso corresponde a los mismos diagramas, salvo que la transformación natural corresponde a las flechas verticales. Todo esto significa que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,-)$ es un **bifuntor**, es decir es un funtor en dos argumentos, y su comportamiento en un argumento es compatible con su comportamiento en el otro. ▲

4.7. Ejemplo. Sea $\{*\}$ un conjunto unipuntual. El funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\},-)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ es isomorfo a $\mathrm{Id}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. En efecto, se ve que la biyección em

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\},X) &\xrightarrow{\cong} X, \\ f &\mapsto f(*) \end{aligned}$$

es natural en X.

De la misma manera, para espacios vectoriales, el funtor $\underline{\mathrm{Hom}}_k(k,-)$ es isomorfo a $\mathrm{Id}\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$, gracias al isomorfismo natural $\underline{\mathrm{Hom}}_k(k,V) \cong V$ definido por $f \mapsto f(1)$. ▲

5 Producto de Godement

5.1. Definición.

- Sean $\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E}$ tres categorías;
- sean F_1, G_1 dos funtores entre $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$;
- sean F_2, G_2 dos funtores entre $\mathscr{D}$ y $\mathscr{E}$;
- sean $\alpha\colon F_1 \Rightarrow G_1$ y $\beta\colon F_2 \Rightarrow G_2$ dos transformaciones naturales.

Todo esto puede ser expresado mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

Entonces, el **producto de Godement**[*] de α y β es la transformación natural

$$\beta * \alpha\colon F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$$

definida como

$$(\beta * \alpha)_X := \beta_{G_1(X)} \circ F_2(\alpha_X) = G_2(\alpha_X) \circ \beta_{F_1(X)}.$$

$$\begin{tikzcd} F_2(F_1(X)) \arrow[r, "F_2(\alpha_X)"] \arrow[d, "\beta_{F_1(X)}"'] \arrow[dr, "(\beta*\alpha)_X"] & F_2(G_1(X)) \arrow[d, "\beta_{G_1(X)}"] \\ G_2(F_1(X)) \arrow[r, "G_2(\alpha_X)"'] & G_2(G_1(X)) \end{tikzcd}$$

(Este diagrama conmuta gracias a la naturalidad de β.)

[*]Roger Godement (1921–2016), matemático francés, miembro del grupo Bourbaki, conocido por sus contribuciones en análisis funcional y libros expositivos, por ejemplo “Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux” (1958).

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[rr, bend left, "F_2 \circ F_1"] \arrow[rr, bend right, "G_2 \circ G_1"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \beta * \alpha"] & & \mathscr{E}
\end{tikzcd}
$$

5.2. Observación. *$\beta * \alpha \colon F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$ es una transformación natural: para todo morfismo $f \colon X \to X'$ en $\mathscr{C}$ el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
F_2(F_1(X)) \arrow[r, "(\beta*\alpha)_X"] \arrow[d, "F_2(F_1(f))"'] & G_2(G_1(X)) \arrow[d, "G_2(G_1(f))"] \\
F_2(F_1(X')) \arrow[r, "(\beta*\alpha)_{X'}"'] & G_2(G_1(X'))
\end{tikzcd}
$$

conmuta.

Demostración. Consideremos el siguiente cubo:

$$
\begin{tikzcd}
 & F_2(F_1(X)) \arrow[rr, "F_2(\alpha_X)"] \arrow[dl, "F_2(F_1(f))"'] \arrow[dd, "\beta_{F_1(X)}"] \arrow[ddrr, dashed, "(\beta*\alpha)_X"] & & F_2(G_1(X)) \arrow[dl, "F_2(G_1(f))"'] \arrow[dd, "\beta_{G_1(X)}"] \\
F_2(F_1(X')) \arrow[rr, "F_2(\alpha_{X'})"] \arrow[dd, "\beta_{F_1(X')}"'] \arrow[ddrr, dashed, "(\beta*\alpha)_{X'}"] & & F_2(G_1(X')) \arrow[dd, "\beta_{G_1(X')}"] & \\
 & G_2(F_1(X)) \arrow[rr, "G_2(\alpha_X)"] \arrow[dl, "G_2(F_1(f))"'] & & G_2(G_1(X)) \arrow[dl, "G_2(G_1(f))"] \\
G_2(F_1(X')) \arrow[rr, "G_2(\alpha_{X'})"'] & & G_2(G_1(X')) &
\end{tikzcd}
$$

Las caras izquierda y derecha, posterior y delantera conmutan por la naturalidad de β. La cara de arriba y de abajo conmutan por la naturalidad de α (estas corresponden a los funtores F_2 y G_2 aplicados al cuadrado de naturalidad). Podemos concluir que la sección diagonal del cubo también conmuta. ■

5.3. Observación. *El producto de Godement es asociativo: para un diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left, "F_3"] \arrow[r, bend right, "G_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}
$$

se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

5.4. Observación. *Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ tres categorías. Sean F, G, H funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y sean I, J, K tres funtores $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$. Consideremos transformaciones naturales*

$$\alpha\colon F \Rightarrow G, \quad \beta\colon G \Rightarrow H, \quad \sigma\colon I \Rightarrow J, \quad \tau\colon J \Rightarrow K.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\beta\Downarrow"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J" description] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\tau\Downarrow"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Entonces,

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha).$$

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

Un caso muy especial es cuando una de las transformaciones naturales en cuestión es la identidad:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{Id}"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=50, "G"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

en este caso se escribe simplemente

$$\beta \circ F\colon G \circ F \Rightarrow F \circ H.$$

Es la transformación natural definida por

$$(\beta \circ F)_X := \beta_{F(X)}.$$

De la misma manera, si $\beta = \mathrm{Id}$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=50, "H"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{Id}"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

entonces se trata de una transformación natural

$$H \circ \alpha\colon H \circ F \Rightarrow H \circ G$$

definida por

$$(H \circ \alpha)_X := H(\alpha_X).$$

6 Funtores representables y el lema de Yoneda

Por fin estamos listos para demostrar el hecho más importante de la teoría de categorías básica.

6.1. Proposición (Lema de Yoneda[*]).

1) *Para cada $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ y cada funtor covariante $F\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),F) \xrightarrow{\cong} F(X).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon X \to X'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f^*"'] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"] & F(X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),G) \arrow[r, "\cong"] & G(X)
\end{tikzcd}$$

($f\colon X \to X'$ induce una transformación natural $f^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$, y a su vez una aplicación entre conjuntos $f^*\colon \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),F) \to \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-),F)$ por la precomposición; la transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ induce un morfismo entre conjuntos $\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),F) \Rightarrow \operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-),G)$ por la poscomposición con α.)

2) *Para cada $Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ y cada funtor contravariante $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ tenemos una biyección natural*

$$\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \xrightarrow{\cong} F(Y).$$

Aquí la naturalidad quiere decir que para cada morfismo $f\colon Y \to Y'$ y cada transformación natural $\alpha\colon F \Rightarrow G$ los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \arrow[r, "\cong"] & F(Y) \\
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y'),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "f^*"] & F(Y') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),G) \arrow[r, "\cong"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Veamos, por ejemplo, el caso contravariante. Dejo el caso covariante como un ejercicio al lector. Tenemos que definir una biyección

$$\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \cong F(Y).$$

A partir de una transformación natural $\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow F$ debemos producir un elemento de $F(Y)$. De hecho, hay solo una posibilidad obvia: tenemos la aplicación $\alpha_Y\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Y) \to F(Y)$ y el único elemento que seguramente contiene el conjunto $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Y)$ es el morfismo identidad id_Y. Entonces, podemos considerar

$$\alpha_Y(\mathrm{id}_Y) \in F(Y).$$

Ahora bien, a partir de un elemento $y \in F(Y)$ tenemos que definir una transformación natural

$$\alpha^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow F,$$

[*] Nobuo Yoneda (1930–1996) fue un matemático japonés, conocido principalmente por el lema que lleva su nombre. La leyenda dice que Yoneda y Saunders Mac Lane, uno de los fundadores de la teoría de categorías, se encontraron en un café de la estación de París Norte y su conversación continuó en el tren de Yoneda justo antes de que este partiera. Fue en esta ocasión que Yoneda explicó a Mac Lane su famoso lema. Gracias a esta coincidencia, Mac Lane formuló el lema como lo conocimos hoy en día y lo popularizó. Después de su regreso a Japón, Yoneda trabajó en informática, en particular en el lenguaje de programación Algol.

es decir, una familia de morfismos

$$\alpha_X^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to F(X).$$

Si tenemos un elemento $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, entonces F nos da una aplicación entre conjuntos $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$. Podemos aplicar $F(f)$ a $y \in F(Y)$ para obtener un elemento de $F(X)$:

$$\alpha_X^y(f) := F(f)(y).$$

Hay que verificar varios detalles.

1) **α_X^y define una transformación natural $\alpha^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow F$.** En efecto, para cada $f\colon X \to X'$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \arrow[r, "\alpha_X^y"] & F(X) & h\circ f \arrow[r, mapsto] & F(h\circ f)(y) = F(f)\circ F(h)(y) \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',Y) \arrow[u, "-\circ f"] \arrow[r, "\alpha_{X'}^y"'] & F(X') \arrow[u, "F(f)"'] & h \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & F(h)(y) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

2) **Las correspondencias que hemos definido dan una biyección entre los conjuntos $\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F)$ y $F(Y)$.**

   Si tenemos una transformación natural $\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow F$, entonces el elemento correspondiente de $F(Y)$ es $\alpha_Y(\mathrm{id}_Y)$. Luego, a partir de $\alpha_Y(\mathrm{id}_Y)$ se construye la transformación natural

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) &\to F(X), \\ f &\mapsto F(f)\circ\alpha_Y(\mathrm{id}_Y). \end{aligned}$$

   Pero α es natural, de donde

$$F(f)\circ\alpha_Y(\mathrm{id}_Y) = \alpha_X\circ f^*(\mathrm{id}_Y) = \alpha_X(f).$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & F(Y) \arrow[d, "F(f)"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \arrow[r, "\alpha_X"'] & F(X)
\end{tikzcd}$$

   A partir de $y \in F(Y)$ se construye una transformación natural $\alpha_X^y\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to F(X)$ definida por $\alpha_X^y(f) = F(f)(y)$. Luego, se recupera el elemento $\alpha_Y^y(\mathrm{id}_Y) = F(\mathrm{id}_Y)(y) = \mathrm{id}_{F(y)}(y) = y$.

3) **La biyección es natural.** Primero, hay que ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \arrow[r, "\cong"] & F(Y) \\
\operatorname{Nat}(\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y'),F) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\cong"] & F(Y') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

   En efecto, para una transformación natural $\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y') \Rightarrow F$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
\alpha(f\circ -) \arrow[r, mapsto] & \alpha_Y(f\circ \mathrm{id}_Y) = \alpha_Y\circ f^* = F(f)\circ\alpha_{Y'}(\mathrm{id}_{Y'}) \\
\alpha \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \alpha_{Y'}(\mathrm{id}_{Y'}) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Aquí una vez más usamos la naturalidad de α:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y',Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & F(Y) \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y',Y') \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & F(Y') \arrow[u, "F(f)"']
\end{tikzcd}$$

Comprobemos ahora la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\alpha\circ -"'] & F(Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y),G) \arrow[r, "\cong"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

En efecto, para una transformación natural $\beta\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y) \Rightarrow F$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \beta_X(\mathrm{id}_X) \arrow[d, mapsto] \\
\alpha\circ\beta \arrow[r] & (\alpha\circ\beta)_X(\mathrm{id}_X) = \alpha_X(\beta_X(\mathrm{id}_X))
\end{tikzcd}$$

■

El siguiente es un caso particular del lema de Yoneda cuando F es el funtor covariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$ o el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y)$.

6.2. Corolario (Encajamiento de Yoneda).

1) *Para cualesquiera $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-), \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',X).$$

2) *Para cualesquiera $Y, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ tenemos una biyección natural*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y), \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y')) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Y').$$

El último resultado puede ser interpretado de la manera siguiente. Si $\mathscr{C}$ es una categoría pequeña, entonces para dos funtores $F,G\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ las transformaciones naturales $\mathrm{Nat}(F,G)$ forman un conjunto. Por lo tanto podemos considerar la categoría

$$\widehat{\mathscr{C}} := \mathbf{Fun}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}),$$

llamada la **categoría de prehaces sobre** $\mathscr{C}$, cuyos objetos son los funtores $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales $F \Rightarrow G$. El lema de Yoneda nos dice que tenemos un funtor

$$\begin{aligned} \mathscr{Y}\colon \mathscr{C} &\to \widehat{\mathscr{C}}, \\ X &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X), \end{aligned}$$

que es fiel y pleno, lo cual quiere decir que para cada par de objetos X, X' tenemos una biyección

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X') &\cong \operatorname{Hom}_{\widehat{\mathscr{C}}}(\mathscr{Y}(X),\mathscr{Y}(X')), \\ f &\mapsto \mathscr{Y}(f). \end{aligned}$$

En consecuencia la categoría $\mathscr{C}$ puede ser vista como una subcategoría plena de la categoría más grande $\widehat{\mathscr{C}}$. El funtor $\mathscr{Y}$ recibe el nombre de **encajamiento de Yoneda** y tiene un rol fundamental en álgebra y geometría. De modo similar, tenemos la versión contravariante

$$\begin{aligned} \mathscr{Y}\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Fun}(\mathscr{C},\mathbf{Set}), \\ X &\mapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-). \end{aligned}$$

6.3. Corolario.

1) *Si* $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ *para algún objeto* X*, entonces* X *está definido de manera única salvo isomorfismo único.*

2) *Si* $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Y)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ *para algún objeto* Y*, entonces* Y *está definido de manera única salvo isomorfismo único.*

Demostración. Por ejemplo, supongamos que

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-) \cong F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-).$$

Este isomorfismo de funtores corresponde a un par de transformaciones naturales

$$\alpha\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-), \quad \beta\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$$

tales que

$$\beta\circ\alpha = \mathrm{Id}_{\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)}, \quad \alpha\circ\beta = \mathrm{Id}_{\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-)}.$$

Por el encajamiento de Yoneda, α y β corresponden a morfismos $f\colon X' \to X$ y $g\colon X \to X'$ tales que $g\circ f = \mathrm{id}_{X'}$ y $f\circ g = \mathrm{id}_X$.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-) \arrow[Rightarrow, loop left, "\mathrm{Id}"] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\alpha"] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X',-) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\beta"] \arrow[Rightarrow, loop right, "\mathrm{Id}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, shift right, "g"'] & X' \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

■

6.4. Definición. Si para un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ (resp. $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$) tenemos un isomorfismo $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$ (resp. $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X)$) para algún objeto $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$, se dice que F es un funtor **representable**[*], y que F es **representado** por X. (Por el lema de Yoneda, este X es único salvo isomorfismo.)

Los funtores representables son un pilar de las matemáticas modernas porque muchas construcciones universales pueden ser formuladas en términos de representabilidad. El lema de Yoneda tiene el privilegio de ser uno de los resultados más tautológicos y profundos al mismo tiempo.

Ejemplos interesantes de funtores representables van a surgir más adelante.

[*] En el caso contravariante $F \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ algunos autores dicen que F es **correpresentado** por X, pero yo no voy a usar esta terminología.

7 Funtores adjuntos

Sea V un espacio vectorial dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Recordemos que dos operadores $A \colon V \to V$ y $A^* \colon V \to V$ son *adjuntos* si para cualesquiera $v_1, v_2 \in V$ se cumple

$$\langle A v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, A^* v_2 \rangle.$$

Algo parecido existe en la teoría de categorías: es la nocion de funtores adjuntos.

7.1. Definición. Sean $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores. Se dice que F es **adjunto por la izquierda** a G y que G es **adjunto por la derecha** a F si para cualesquiera $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ e $Y \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$ tenemos una biyección natural

$$\Phi_{XY} \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$

La naturalidad quiere decir que para X fijo la biyección

$$\Phi_{X,-} \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), -) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(-))$$

es un isomorfismo de funtores $\mathcal{D} \to$ **Set**, y para Y fijo la biyección

$$\Phi_{-,Y} \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), Y) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(Y))$$

es también un isomorfismo de funtores $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ **Set**.

7.2. Ejemplo. Los funtores adjuntos aparecen en varios contextos en álgebra y geometría. Lamentablemente, no tenemos bastante tiempo para ver muchos ejemplos; aquí sugiero algunos y dejo los detalles como ejercicios al lector.

1) Tenemos el funtor olvidadizo k-**Vect** $\to$ **Set** que para cada espacio vectorial V "olvida" su estructura y le asocia el conjunto subyacente. A cada conjunto X se puede asociar el espacio vectorial $k\langle X \rangle$ generado por X; es decir, el espacio cuya base corresponde a los elementos de X. En este caso toda aplicación lineal $f \colon k\langle X \rangle \to V$ se define de manera única por los imágenes de los elementos de la base.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & k\langle X \rangle \\ V \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

   Esto nos da una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Vect}}(k\langle X \rangle, V) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, V).$$

   Luego, el funtor $k\langle - \rangle$ es adjunto por la izquierda al funtor olvidadizo k-**Vect** $\to$ **Set**.

2) El funtor olvidadizo G-**Set** $\to$ **Set** tiene un funtor adjunto por la izquierda **Set** $\to$ G-**Set** que a cada conjunto X asocia el conjunto $G \times X$ con la acción de G mediante $g \cdot (h, x) := (gh, x)$. Hay una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{G\text{-}\mathbf{Set}}(G \times X, Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y).$$

3) Para cada conjunto fijo X tenemos el funtor

$$- \times X \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

   que asocia a un conjunto Y el producto $Y \times X$ y a una aplicación entre conjuntos $f \colon Y_1 \to Y_2$ la aplicación $f \times \mathrm{id} \colon Y_1 \times X \to Y_2 \times X$. Este funtor es adjunto por la izquierda al funtor

$$(-)^X := \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, -) \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}.$$

En otras palabras, tenemos una biyección natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y \times X, Z) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Y, Z^X).$$

En efecto, a una aplicación $f\colon Y \times X \to Z$ se puede asociar una aplicación $Y \to Z^X$ definida por

$$y \mapsto (x \mapsto f(y,x)).$$

Viceversa, toda aplicación $g\colon Y \to Z^X$ nos da una aplicación $Y \times X \mapsto Z$ definida por

$$(y,x) \mapsto (g(y))(x).$$

4) Si X es un espacio topológico, podemos olvidar su topología y considerar a X como un conjunto. Esto define el funtor olvidadizo

$$Olv\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}.$$

Un funtor adjunto a Olv debe ir en la otra dirección: para un conjunto X definir alguna topología sobre el mismo. De hecho, hay dos modos canónicos de hacerlo: definir sobre X la **topología discreta**, donde cada subconjunto $U \subseteq X$ es abierto, o la **topología indiscreta**, donde los únicos subconjuntos abiertos son $\emptyset$ y X. Esto define dos funtores diferentes

$$Discr, Indiscr\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}.$$

Resulta que Olv es adjunto por la izquierda a $Indiscr$ y por la derecha a $Discr$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Olv(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Indiscr(Y)),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Discr(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Olv(Y)).$$

Esto es otro modo de decir que si Y lleva la topología indiscreta, entonces cualquier aplicación $X \to Y$ es continua. Si X lleva la topología discreta, entonces cualquier aplicación $X \to Y$ es continua.

5) Tenemos el funtor de inclusión de la categoría de grupos abelianos en la categoría de grupos:

$$i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}.$$

Un funtor adjunto a i debe construir un grupo abeliano a partir de un grupo G de manera canónica. Como sabemos, tenemos que considerar la **abelianización**:

$$G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G].$$

Aquí $[G,G]$ es el **subgrupo conmutador**: el subgrupo generado por todos los conmutadores:

$$[G,G] := \langle [x,y] := xyx^{-1}y^{-1} \mid x,y \in G \rangle.$$

Es un subgrupo normal, y por ende se puede pasar al grupo cociente $G/[G,G]$ que será abeliano. La abelianización tiene la siguiente propiedad universal: todo homomorfismo $f\colon G \to A$ donde A es un grupo abeliano se factoriza de modo único por G^{ab}:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & A \\
G^{ab} \arrow[ur, dashed, "\exists!"']
\end{tikzcd}$$

(ya que A es abeliano, todos los conmutadores están en el núcleo de f).

La abelianización es un funtor $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ que es adjunto por la izquierda a i:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(G^{\mathrm{ab}}, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G, i(A)).$$

6) Si R es un anillo, entonces sus **unidades** (elementos invertibles) forman un grupo $R^\times$. Esto nos da un funtor

$$(-)^\times\colon \mathbf{Ring}\to\mathbf{Grp}.$$

Un funtor adjunto debe construir cierto anillo a partir de un grupo G de manera canónica. Es la construcción del anillo $\mathbb{Z}[G]$ que consiste de las sumas finitas formales $\sum_{g\in G} n_g\, g$, donde la multiplicación está definida por la distributividad y la multiplicación en G. Esto es un funtor

$$\mathbb{Z}[-]\colon \mathbf{Grp}\to\mathbf{Ring},$$

que es adjunto por la izquierda a $(-)^\times$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[G],R)\cong\operatorname{Hom}_{\mathbf{Grp}}(G,R^\times).$$ ▲

Los funtores adjuntos están relacionados con los funtores representables de la siguiente manera.

7.3. Proposición.

1) *Para un funtor $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ existe un adjunto por la derecha si y solamente si para todo $Y\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ el funtor*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}}&\to\mathbf{Set},\\ X&\mapsto\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y)\end{aligned}$$

es representable, es decir isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X')$ para algún $X'\in\operatorname{Ob}(\mathscr{C})$.

2) *Para un funtor $G\colon\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ existe un adjunto por la izquierda si y solamente si para todo $X\in\operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ el funtor*

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(-))\colon \mathscr{D}&\to\mathbf{Set},\\ Y&\mapsto\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y))\end{aligned}$$

es representable, es decir isomorfo a $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(Y',-)$ para algún $Y'\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$.

Demostración. Por ejemplo, veamos la primera parte. Si F es adjunto por la izquierda a G, entonces para todo $Y\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ tenemos un isomorfismo natural

$$\Phi_{-,Y}\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,G(Y))$$

y $X':=G(Y)$ representa el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y)$. Recíprocamente, supongamos que para todo objeto $Y\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ tenemos isomorfismos de funtores

$$\Phi_{-,Y}\colon\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X').$$

Sea $G(Y):=X'$. Un morfismo $f\colon Y_1\to Y_2$ en $\mathscr{D}$ induce una transformación natural entre funtores

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X_1')\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y_1)\xrightarrow{f\circ-}\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-),Y_2)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X_2'),$$

que por el encajamiento de Yoneda (6.2) corresponde a un único morfismo $X_1'\to X_2'$. Esto define un morfismo $G(f)\colon G(X_1)\to G(X_2)$, y se ve que definido de esta manera, G es un funtor $\mathscr{D}\to\mathscr{C}$. ■

7.4. Proposición (Uno de los adjuntos define al otro, salvo isomorfismo).

1) *Si $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ es adjunto por la izquierda a dos funtores $G,G'\colon\mathscr{D}\to\mathscr{C}$, entonces $G\cong G'$.*

2) *Si $G\colon\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ es adjunto por la derecha a dos funtores $F,F'\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$, entonces $F\cong F'$.*

Demostración. Demostremos la primera parte; la segunda es idéntica. Si tenemos biyecciones naturales

$$\Phi_{XY}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)), \quad \Phi'_{XY}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y)),$$

entonces los isomorfismos de funtores

$$\Phi'_{-,Y}\circ\Phi^{-1}_{-,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,G(Y)) \Rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,G'(Y))$$

bajo el lema de Yoneda (6.3) corresponden a isomorfismos $\alpha_Y\colon G(Y) \xrightarrow{\cong} G'(Y)$ para cada Y. Notamos que los diagramas

(7.1)
$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \arrow[dl, "\Phi_{XY}"', "\cong"] \arrow[dr, "\Phi'_{XY}", "\cong"'] & \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)) \arrow[rr, "\alpha_{Y*}"'] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y))
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Para obtener un isomorfismo de funtores $G\cong G'$, falta verificar que los α_Y definen una transformación natural, es decir que para cada morfismo $f\colon Y\to Y'$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] \arrow[d, "G(f)"'] & G'(Y) \arrow[d, "G'(f)"] \\
G(Y') \arrow[r, "\alpha_{Y'}"'] & G'(Y')
\end{tikzcd}$$

Pero, también gracias a Yoneda, este diagrama es conmutativo si y solamente si para todo X el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)) \arrow[r, "\alpha_{Y*}"] \arrow[d, "G(f)_*"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y)) \arrow[d, "G'(f)_*"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y')) \arrow[r, "\alpha_{Y'*}"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y'))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Gracias a la naturalidad de las biyecciones $\Phi_{X,-}$ y $\Phi'_{X,-}$, en el siguiente cubo

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "\cong"', "\Phi_{XY}"] \arrow[dd, "f_*"] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \arrow[dl, "\cong"', "\Phi'_{XY}"] \arrow[dd, "f_*"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)) \arrow[rr, "\alpha_{Y*}"] \arrow[dd, "G(f)_*"'] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y)) \arrow[dd, "G'(f)_*"] & \\
& \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y') \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "\cong"', "\Phi_{XY'}"] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y') \arrow[dl, "\cong"', "\Phi'_{XY'}"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y')) \arrow[rr, "\alpha_{Y'*}"'] & & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G'(Y')) &
\end{tikzcd}$$

la cara izquierda y derecha conmutan; las caras de arriba y de abajo conmutan por (7.1), y la cara posterior conmuta trivialmente. Entonces, se puede concluir que la cara delantera conmuta. ∎

Los funtores adjuntos tienen muchas propiedades útiles. Una de estas es preservación de mono- y epimorfismos.

7.5. Proposición. *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Entonces,*

1) *F **preserva epimorfismos**: para todo epimorfismo $f\colon X \twoheadrightarrow X'$ en $\mathscr{C}$ el morfismo $F(f)\colon F(X) \to F(X')$ es un epimorfismo en $\mathscr{D}$;*

2) *G **preserva monomorfismos**: para todo monomorfismo $g\colon Y \rightarrowtail Y'$ en $\mathscr{D}$ el morfismo $G(g)\colon G(Y) \to G(Y')$ es un monomorfismo en $\mathscr{C}$.*

Demostración. Por ejemplo, en 1), para un objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', G(Z)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Z)) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), Z) \arrow[r, "F(f)^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Z)
\end{tikzcd}$$

Si f es un epimorfismo, entonces la flecha f^* es inyectiva, y luego $F(f)^*$ es también inyectiva. La inyectividad de $F(f)^*$ para cualquier Z precisamente significa que $F(f)$ es un epimorfismo. La parte 2) se deja como un ejercicio. ■

8 Unidad y counidad de una adjunción

A veces es útil otra descripción de adjunción de funtores.

8.1. Proposición. *Consideremos una adjunción*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

En particular, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X)),\\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y)).
\end{aligned}$$

1) *Sea $\eta_X\colon X \to GF(X)$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon F(X) \to F(X)$ bajo la primera biyección.*

2) *Sea $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ el morfismo que corresponde al morfismo identidad $\mathrm{id}\colon G(Y) \to G(Y)$ bajo la segunda biyección.*

*Entonces los η_X definen una transformación natural $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow G\circ F$ (la **unidad de la adjunción**) y los ϵ_Y definen una transformación natural $F\circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ (la **counidad de la adjunción**), y la adjunción puede ser escrita como*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)),\\
&(F(X) \xrightarrow{f} Y) \mapsto (X \xrightarrow{\eta_X} GF(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)),\\
(F(X) \xrightarrow{F(g)} FG(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y) \leftarrow\!\shortmid\ &(X \xrightarrow{g} G(Y)).
\end{aligned}$$

Demostración. Por ejemplo, para ver que $\eta_X\colon X \to GF(X)$ define una transformación natural, tenemos que ver que los siguientes diagramas son conmutativos para cada morfismo $g\colon X \to X'$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "g"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(g)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

De hecho, por la definición de η_X y la naturalidad de adjunción, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "F(g)\circ -"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "GF(g)\circ -"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X')) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X')) \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), F(X')) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "-\circ F(g)"] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X', GF(X')) \arrow[u, "-\circ g"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
F(g) \arrow[r, mapsto] & GF(g)\circ\eta_X = \eta_{X'}\circ g \\
\mathrm{id}_{F(X')} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \eta_{X'} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

De modo similar, todo $f\colon F(X) \to Y$ nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f\circ -"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "G(f)\circ -"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto] & G(f)\circ\eta_X
\end{tikzcd}$$

Luego, f corresponde a $G(f)\circ\eta_X$. La verificación de que ϵ es una transformación natural $F\circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ y que $g\colon X \to G(Y)$ corresponde a $\epsilon_Y \circ F(g)$ es similar. ■

8.2. Proposición. *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Entonces*

1) *la unidad de la adjunción $\eta_X\colon X \to GF(X)$ es un monomorfismo para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ si y solamente si F es fiel;*

2) *la counidad de la adjunción $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ es un epimorfismo para todo $Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ si y solamente si G es fiel.*

Demostración. Para todo morfismo $f\colon X' \to X$, bajo la adjunción a $F(f)$ corresponde el morfismo $\eta_X \circ f$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "-\circ F(f)"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X)) \arrow[d, "-\circ f"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), F(X)) \arrow[r, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X', GF(X))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F(X)} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_X \arrow[d, mapsto] \\
F(f) \arrow[r, mapsto] & \eta_X\circ f
\end{tikzcd}$$

De la misma manera, para todo $g\colon Y \to Y'$, a $G(g)$ corresponde el morfismo $g\circ\epsilon_Y$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "g\circ -"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y)) \arrow[d, "G(g)\circ -"] \\
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y') \arrow[r, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\epsilon_Y \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{id}_{G(Y)} \arrow[d, mapsto] \\
g\circ\epsilon_Y \arrow[r, mapsto] & G(g)
\end{tikzcd}$$

Tenemos aplicaciones entre conjuntos

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',X) & \xrightarrow{\eta_{X*}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',GF(X)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'),F(X)) \\
f & \longmapsto & \eta_X\circ f & \longmapsto & F(f)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(Y,Y') & \xrightarrow{\epsilon_Y^*} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y),Y') & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y),G(Y')) \\
g & \longmapsto & g\circ\epsilon_Y & \longmapsto & G(g)
\end{array}$$

η_X es mono para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ si y solamente si la aplicación η_{X*} de arriba es inyectiva para todo $X, X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, si y solamente si F es fiel. Asimismo, ϵ_Y es epi para todo $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ si y solamente si la aplicación ϵ_Y^* es inyectiva para todo $Y, Y' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$, si y solamente si G es fiel. ■

8.3. Ejemplo. Consideremos la adjunción entre la consrucción de k-espacios vectoriales generados por un conjunto y el funtor olvidadizo k-**Vect** → **Set**. El funtor $X \rightsquigarrow k\langle X\rangle$ es obviamente fiel: diferentes aplicaciónes entre conjuntos $X \to Y$ inducen diferentes aplicaciones lineales $k\langle X\rangle \to k\langle Y\rangle$. Esto implica que la unidad de la adjunción $\eta_X\colon X \to k\langle X\rangle$ es inyectiva para todo X. En efecto, η_X es simplemente la inclusión de los generadores en $k\langle X\rangle$. ▲

9 Caracterización de adjunciones por las identidades triangulares

9.1. Proposición (Identidades triangulares). *Sean $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores adjuntos y sean $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow G\circ F$ y $\epsilon\colon F\circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ la unidad y counidad correspondiente. Entonces, se cumplen las identidades*

(9.1) $$(\epsilon\circ F)\circ(F\circ\eta) = \mathrm{Id}_F, \quad (G\circ\epsilon)\circ(\eta\circ G) = \mathrm{Id}_G.$$

(9.2) $$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\circ\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{Id}"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon\circ F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta\circ G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{Id}"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\circ\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Aquí $(\epsilon\circ F)_X := \epsilon_{F(X)}$, $(F\circ\eta)_X := F(\eta_X)$, $(\eta\circ G)_Y := \eta_{G(Y)}$, $(G\circ\epsilon)_Y := G(\epsilon_Y)$ *(véase §5).*

Las fórmulas (9.1) se conocen como las **identidades triangulares**.

Demostración. Según 8.1, la biyección de adjunción viene dada por

$$\begin{aligned}
\Phi_{XY}\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)), \\
(F(X) \xrightarrow{f} Y) &\mapsto (X \xrightarrow{\eta_X} GF(X) \xrightarrow{G(f)} G(Y)), \\
(F(X) \xrightarrow{F(g)} FG(Y) \xrightarrow{\epsilon_Y} Y) &\leftarrow\!\shortmid (X \xrightarrow{g} G(Y)).
\end{aligned}$$

Los diagramas (9.2) significan que para todo objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ y todo objeto $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ se tiene

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & FGF(X) \arrow[d, "\epsilon_{F(X)}"] \\ & F(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\epsilon_Y)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

Efectivamente, para el morfismo $\mathrm{id}_{F(X)}\colon F(X) \to F(X)$ se cumple

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{F(X)} = \Phi^{-1}_{X,F(X)} \circ \Phi_{X,F(X)}(\mathrm{id}_{F(X)}) = \Phi^{-1}_{X,F(X)}(G(\mathrm{id}_{F(X)}) \circ \eta_{F(X)}) = \Phi^{-1}_{X,F(X)}(\mathrm{id}_{GF(X)} \circ \eta_{F(X)}) \\ = \Phi^{-1}_{X,F(X)}(\eta_{F(X)}) = \eta_{F(X)} \circ F(\eta_X),\end{aligned}$$

y para $\mathrm{id}_{G(Y)}\colon G(Y) \to G(Y)$ se cumple

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{G(Y)} = \Phi_{G(Y),Y} \circ \Phi^{-1}_{G(Y),Y}(\mathrm{id}_{G(Y)}) = \Phi_{G(Y),Y}(\epsilon_Y \circ F(\mathrm{id}_{G(Y)})) = \Phi_{G(Y),Y}(\epsilon_Y \circ \mathrm{id}_{FG(X)}) \\ = \Phi_{G(Y),Y}(\epsilon_Y) = G(\epsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}.\end{aligned}$$

■

Las unidades triangulares nos dan una caracterización de adjunciones que puede ser usada como una definición alternativa.

9.2. Proposición. *Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores y sean $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow G \circ F$ y $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ dos transformaciones naturales que cumplen las identidades triangulares*

$$(\epsilon \circ F) \circ (F \circ \eta) = \mathrm{Id}_F, \quad (G \circ \epsilon) \circ (\eta \circ G) = \mathrm{Id}_G;$$

es decir,

$$\epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = \mathrm{id}_X, \quad G(\epsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} = \mathrm{id}_Y$$

para cualesquiera $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$. Entonces, F es adjunto por la izquierda a G.

Demostración. Necesitamos definir una biyección natural

$$\Phi_{XY}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$

Las consideraciones de arriba sugieren que hay que poner

$$\Phi_{XY}(f) := G(f) \circ \eta_X, \quad \Phi^{-1}_{XY}(g) := \epsilon_Y \circ F(g).$$

Estas aplicaciones son mutualmente inversas:

$$\Phi^{-1}_{XY}(\Phi_{XY}(f)) = \Phi^{-1}_{XY}(G(f) \circ \eta_X) = \epsilon_Y \circ F(G(f) \circ \eta_X) = \epsilon_Y \circ FG(f) \circ F(\eta_X) = f \circ \epsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) = f.$$

Aquí hemos usado la naturalidad de ϵ:

$$\begin{tikzcd} FGF(X) \arrow[r, "\epsilon_{F(X)}"] \arrow[d, "FG(f)"'] & F(X) \arrow[d, "f"] \\ FG(Y) \arrow[r, "\epsilon_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

De modo similar,

$$\Phi_{XY}(\Phi^{-1}_{XY}(g)) = \Phi_{XY}(\epsilon_Y \circ F(g)) = G(\epsilon_Y \circ F(g)) \circ \eta_X = G(\epsilon_Y) \circ GF(g) \circ \eta_X = G(\epsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ g = g,$$

usando la naturalidad de η:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "g"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(g)"] \\ G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"'] & GFG(Y) \end{tikzcd}$$

Falta ver que la biyección Φ_{XY} definida de esta manera es natural. La naturalidad en X quiere decir que para todo morfismo $h\colon X' \to X$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\Phi_{XY}"] \arrow[d, "F(h)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "h^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'),Y) \arrow[r, "\Phi_{X'Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X',G(Y))
\end{tikzcd}$$

conmuta. En efecto,

$$h^* \circ \Phi_{XY}(h) = h^*(G(f) \circ \eta_X) = G(f) \circ \eta_X \circ h$$

y

$$\Phi_{X'Y} \circ F(h)^*(f) = \Phi_{X'Y}(f \circ F(h)) = G(f \circ F(h)) \circ \eta_{X'} = G(f) \circ GF(h) \circ \eta_{X'}.$$

Tenemos $\eta_X \circ h = GF(h) \circ \eta_{X'}$ gracias a la naturalidad de η:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"] \arrow[d, "h"'] & GF(X') \arrow[d, "GF(h)"] \\
X \arrow[r, "\eta_X"'] & GF(X)
\end{tikzcd}$$

Para comprobar la naturalidad en Y, será mejor usar la aplicación inversa Φ_{XY}^{-1} y comprobar que para todo $h\colon Y \to Y'$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)) \arrow[r, "\Phi_{XY}^{-1}"] \arrow[d, "G(h)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) \arrow[d, "h_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y')) \arrow[r, "\Phi_{XY'}^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Tenemos

$$h_* \circ \Phi_{XY}^{-1}(g) = h_*(\epsilon_Y \circ F(g)) = h \circ \epsilon_Y \circ F(g)$$

y

$$\Phi_{XY'}^{-1} \circ G(h)_*(g) = \Phi_{XY'}^{-1}(G(h) \circ g) = \epsilon_{Y'} \circ F(G(h) \circ g) = \epsilon_{Y'} \circ FG(h) \circ F(g),$$

y nos queda notar que $h \circ \epsilon_Y = \epsilon_{Y'} \circ FG(h)$:

$$\begin{tikzcd}
FG(Y) \arrow[r, "\epsilon_Y"] \arrow[d, "FG(h)"'] & Y \arrow[d, "h"] \\
FG(Y') \arrow[r, "\epsilon_{Y'}"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

■

10 Caracterización de funtores adjuntos en términos de propiedades universales

10.1. Observación (Propiedad universal de la unidad y counidad). *Sean $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores adjuntos y sean $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow G \circ F$ y $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ la unidad y counidad correspondientes.*

1) Para todo morfismo $f\colon F(X)\to Y$ existe un morfismo único $\widetilde{f}\colon X\to G(Y)$ tal que $\epsilon_Y\circ F(\widetilde{f})=f$:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "F(\widetilde{f})"'] & & Y \\
& FG(Y) \arrow[ur, "\epsilon_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

2) Para todo morfismo $g\colon X\to G(Y)$ existe un morfismo único $\widehat{g}\colon F(X)\to Y$ tal que $G(\widehat{g})\circ\eta_X=g$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & G(Y) \\
& GF(Y) \arrow[ur, "G(\widehat{g})"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sigue del hecho de que la biyección de adjunción viene dada por

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y)),\\
f &\mapsto \widetilde{f}:=G(f)\circ\eta_X,\\
\widehat{g}:=\epsilon_Y\circ F(g) &\leftarrow\!\shortmid g
\end{aligned}$$

—véase 8.1. ■

Resulta que cada una de las propiedades universales de arriba caracteriza una adjunción.

10.2. Proposición.

1) Sea $F\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ un funtor. Supongamos que para todo $Y\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ existe un objeto $G(Y)$ y un morfismo $\epsilon_Y\colon F(G(Y))\to Y$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: para todo morfismo $f\colon F(X)\to Y$ existe un morfismo único $\widetilde{f}\colon X\to G(Y)$ tal que el diagrama de abajo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "F(\widetilde{f})"'] & & Y \\
& F(G(Y)) \arrow[ur, "\epsilon_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, $G\colon Y\rightsquigarrow G(Y)$ define un funtor adjunto por la derecha a F y ϵ es la counidad de la adjunción.

2) Sea $G\colon\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ un funtor tal que para todo $X\in\operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ existe un objeto $F(X)\in\operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ y un morfismo $\eta_X\colon X\to G(F(X))$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: para todo morfismo $g\colon X\to G(Y)$ existe un morfismo único $\widehat{g}\colon F(X)\to Y$ tal que el diagrama de abajo conmuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & G(Y) \\
& G(F(X)) \arrow[ur, dashed, "G(\widehat{g})"'] &
\end{tikzcd}$$

Entonces, $F\colon X\rightsquigarrow F(X)$ define un funtor adjunto por la izquierda a G y η es la unidad de la adjunción.

Demostración. Por ejemplo, analicemos el segundo caso.

Primero, hay que ver que F es un funtor. Para definir F sobre las flechas, para un morfismo $\phi\colon X\to X'$ consideremos la composición $\eta_{X'}\circ\phi\colon X\to GF(X')$. Entonces, existe un morfismo único

$$F(\phi):=\widehat{\eta_{X'}\circ\phi}\colon F(X)\to F(X')$$

tal que
$$G(F(\phi))\circ\eta_X=\eta_{X'}\circ\phi.$$
Esto será nuestra definición de $F(\phi)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_{X'}\circ\phi"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & G(F(X')) \\
& G(F(X)) \arrow[ur, dashed, "G(F(\phi))"'] &
\end{tikzcd}$$

En particular, si $X=X'$ y $\phi=\mathrm{id}_X$, entonces
$$F(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{F(X)}$$
por la unicidad. Ahora para $\phi\colon X\to X'$ y $\psi\colon X'\to X''$ el morfismo $F(\psi)\colon F(X')\to F(X'')$ es el único morfismo caracterizado por
$$G(F(\psi))\circ\eta_{X'}=\eta_{X''}\circ\psi$$
y $F(\psi\circ\phi)\colon F(X)\to F(X'')$ es el único morfismo caracterizado por
$$G(F(\psi\circ\phi))\circ\eta_X=\eta_{X''}\circ\psi\circ\phi.$$
Pero las fórmulas de arriba y la funtorialidad de G nos dan
$$\eta_{X''}\circ\psi\circ\phi=G(F(\psi))\circ\eta_{X'}\circ\phi=G(F(\psi))\circ G(F(\phi))\circ\eta_X=G(F(\psi)\circ F(\phi))\circ\eta_X,$$
así que
$$F(\psi\circ\phi)=F(\psi)\circ F(\phi).$$
Para ver que $\eta_X\colon X\to GF(X)$, hay que comprobar que para todo morfismo $\phi\colon X\to X'$ el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\phi"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(\phi)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

conmuta. Pero esto se cumple por nuestra *definición* de $F(\phi)$.

Por fin, hay que verificar que
$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,G(Y))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X),Y),\\ g\mapsto\widehat{g}\end{gathered}$$
es una biyección natural.

Si tenemos $\widehat{g_1}=\widehat{g_2}$, entonces $G(\widehat{g_1})=G(\widehat{g_2})$ y por lo tanto $g_1=g_2$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, shift left, "g_1"] \arrow[rr, shift right, "g_2"'] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & G(Y) \\
& G(F(X)) \arrow[ur, dashed, "G(\widehat{g_1})=G(\widehat{g_2})"'] &
\end{tikzcd}$$

Esto prueba que la aplicación $g\mapsto\widehat{g}$ es inyectiva. Para ver que es sobreyectiva, notamos que para $f\colon F(X)\to Y$ se cumple $\widehat{G(f)\circ\eta_X}=f$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "G(f)\circ\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & G(Y) \\
& G(F(X)) \arrow[ur, dashed, "G(f)=G(\widehat{G(f)\circ\eta_X})"'] &
\end{tikzcd}$$

La naturalidad de la biyección en X significa que para todo $\phi\colon X \to X'$ hay diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', G(Y)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\phi^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X'), Y) \arrow[d, "F(\phi)^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X), Y)
\end{tikzcd}$$

Es decir, para todo $g\colon X' \to G(Y)$ debe cumplirse

$$\widehat{g \circ \phi} = \widehat{g} \circ F(\phi).$$

En efecto, $\widehat{g \circ \phi}$ es el único morfismo tal que

$$G(\widehat{g \circ \phi}) \circ \eta_X = g \circ \phi.$$

y $\widehat{g}$ es el único morfismo tal que

$$G(\widehat{g}) \circ \eta_{X'} = g.$$

La segunda fórmula y la naturalidad de η nos da

$$g \circ \phi = G(\widehat{g}) \circ \eta_{X'} \circ \phi = G(\widehat{g}) \circ GF(\phi) \circ \eta_X = G(\widehat{g} \circ F(\phi)) \circ \eta_X.$$

Ahora para $\psi\colon Y \to Y'$ hay que comprobar que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "G(\psi)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X), Y) \arrow[d, "\psi_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y')) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(X), Y')
\end{tikzcd}$$

Es decir, que para todo $g\colon X \to G(Y)$ se cumple

$$\widehat{G(\psi) \circ g} = \psi \circ \widehat{g}.$$

La flecha $\widehat{G(\psi) \circ g}$ se caracteriza por

$$G(\widehat{G(\psi) \circ g}) \circ \eta_X = G(\psi) \circ g,$$

mientras que

$$G(\widehat{g}) \circ \eta_X = g.$$

Luego

$$G(\psi) \circ g = G(\psi) \circ G(\widehat{g}) \circ \eta_X = G(\psi \circ \widehat{g}) \circ \eta_X.$$

■

10.3. Ejemplo. Sea $i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ la inclusión de grupos abelianos en grupos. Para todo grupo G tenemos su abelianización $G^{ab} := G/[G,G]$ junto con el homomorfismo canónico $\eta_G\colon G \to i(G^{ab})$. Luego, para todo grupo abeliano A y todo homomorfismo $f\colon G \to A$ existe un homomorfismo único $f^{ab}\colon G^{ab} \to A$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_G"'] & & i(A) \\
& i(G^{ab}) \arrow[ur, dashed, "i(f^{ab})"'] &
\end{tikzcd}$$

El resultado precedente nos dice que esto es suficiente para deducir que $G \rightsquigarrow G^{ab}$ es un funtor, es adjunto por la izquierda a $i\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, y la unidad de la adjunción es $\eta_G\colon G \to i(G^{ab})$. ▲

11 Objetos terminales e iniciales

11.1. Definición. Sea $\mathcal{C}$ una categoría.

Se dice que un objeto $T \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ es **terminal** si para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ existe morfismo único $X \to T$.

Se dice que un objeto $I \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ es **inicial** si para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ existe morfismo único $I \to X$.

En otras palabras, la definción quiere decir que para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ se tiene $|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,T)| = 1$ y $|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(I,X)| = 1$. En particular, se sigue que $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T,T) = \{\mathrm{id}_T\}$ y $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(I,I) = \{\mathrm{id}_I\}$.

11.2. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** un conjunto $\{*\}$ que consta de un solo elemento es un objeto terminal (para todo X hay exactamente una aplicación $X \to \{*\}$) y el conjunto vacío $\emptyset$ es un objeto inicial (para todo X hay exactamente una aplicación $\emptyset \to X$[*]).

En la categoría de espacios topológicos **Top** los objetos terminales e iniciales son los mismos que en **Set**. ▲

Los objetos terminales e iniciales no siempre existen: por ejemplo, los conjuntos no vacíos forman una categoría que no tiene objeto inicial.

11.3. Ejemplo. En la categoría de anillos **Ring** el anillo nulo 0 es un objeto terminal y el anillo $\mathbb{Z}$ es un objeto inicial (como anillo, $\mathbb{Z}$ está generado por $1 \in \mathbb{Z}$, y para todo anillo R un homomorfismo $f\colon \mathbb{Z} \to R$ debe preservar la identidad). ▲

11.4. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** un grupo trivial $\{e\}$ es un objeto terminal e inicial al mismo tiempo. En la categoría de grupos abelianos **Ab** un grupo nulo $\{0\}$ es un objeto terminal e inicial al mismo tiempo. ▲

11.5. Observación. *Si un objeto terminal (resp. inicial) existe, es único salvo isomorfismo único.*

Demostración. Si existen dos objetos terminales $T, T' \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$, entonces existen morfismos únicos $f\colon T \to T'$ y $g\colon T' \to T$, y las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ necesariamente coinciden con id_T y $\mathrm{id}_{T'}$ respectivamente. ■

11.6. Observación. *Todo funtor adjunto por la izquierda (resp. derecha) preserva objetos iniciales (resp. terminales).*

Demostración. Si $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es adjunto por la izquierda a $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y I es un objeto inicial en $\mathcal{C}$, entonces para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{D})$ se tiene una biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(I), X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(I, G(X))$$

y en particular

$$|\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(I), X)| = |\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(I, G(X))| = 1.$$

Si T es un objeto terminal en $\mathcal{D}$, entonces para todo $X \in \operatorname{Ob}(\mathcal{C})$ se tiene una biyección

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(T)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), T)$$

y en particular

$$|\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(T))| = |\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), T)| = 1.$$ ■

11.7. Ejemplo. Para todo conjunto fijo X el funtor $- \times X\colon$ **Set** $\to$ **Set** es adjunto por la izquierda a $(-)^X\colon$ **Set** $\to$ **Set**. Tenemos $\emptyset \times X = \emptyset$ y $\{*\}^X \cong \{*\}$. ▲

11.8. Ejemplo. El funtor del grupo de unidades $(-)^\times\colon$ **Ring** $\to$ **Grp** es adjunto por la izquierda al funtor $\mathbb{Z}[-]\colon$ **Grp** $\to$ **Ring**. Para un anillo trivial 0 el grupo de unidades es trivial. Para un grupo trivial $G = \{e\}$ el anillo correspondiente $\mathbb{Z}[G]$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$. ▲

[*] En particular, hay exactamente una aplicación $\emptyset \to \emptyset$, entonces $0^0 = 1$.

12 Productos y coproductos

12.1. Definición. Para dos objetos $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ su **producto** es un objeto $X_1 \times X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ dotado de dos morfismos $p_1 \colon X_1 \times X_2 \to X_1$ y $p_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_2$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: si tenemos otro objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ junto con morfismos $f_1 \colon Z \to X_1$ y $f_2 \colon Z \to X_2$, entonces existe un único morfismo $\binom{f_1}{f_2} \colon Z \to X_1 \times X_2$ tal que

$$p_1 \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_1 \quad \text{y} \quad p_2 \circ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f_2.$$

De modo similar, un **coproducto** es un objeto $X_1 \sqcup X_2 \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ dotado de dos morfismos $i_1 \colon X_1 \to X_1 \sqcup X_2$ y $i_2 \colon X_2 \to X_1 \sqcup X_2$ que satisfacen la propiedad universal: si tenemos otro objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ junto con morfismos $f_1 \colon X_1 \to Z$ y $f_2 \colon X_2 \to Z$, entonces existe un único morfismo $(f_1, f_2) \colon Z \to X_1 \times X_2$ tal que

$$(f_1, f_2) \circ i_1 = f_1 \quad \text{y} \quad (f_1, f_2) \circ i_2 = f_2.$$

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] \arrow[d, dashed, "\exists!\binom{f_1}{f_2}"'] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_1 \sqcup X_2 \arrow[d, dashed, "\exists!\,(f_1,f_2)"] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "f_2"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

De modo similar, se pueden definir productos y coproductos infinitos.

12.2. Definición. Sea $\{X_k\}_{k \in I}$ una familia de objetos indexada por un conjunto I.

1) Un **producto** $\prod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $p_k \colon \prod_k X_k \to X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k \colon Z \to X_k\}_{k \in I}$ existe un único morfismo $f \colon Z \to \prod_k X_k$ que satisface $p_k \circ f = f_k$ para cada $k \in I$.

2) Un **coproducto** $\coprod_k X_k$ es un objeto junto con morfismos $i_k \colon X_k \to \coprod_k X_k$ tal que para cualquier otro objeto Z junto con morfismos $\{f_k \colon X_k \to Z\}_{k \in I}$ existe un único morfismo $f \colon \coprod_k X_k \to Z$ que satisface $f \circ i_k = f_k$ para cada $k \in I$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, dashed, "\exists!\, f"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\
\prod_k X_k \arrow[r, "p_k"'] & X_k
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X_k \arrow[r, "i_k"] \arrow[dr, "f_k"'] & \coprod_k X_k \arrow[d, dashed, "\exists!\, f"] \\
 & Z
\end{tikzcd}$$

12.3. Ejemplo. En la categoría de conjuntos **Set** el producto $\prod_k X_k$ es (salvo isomorfismo) el producto cartesiano y el coproducto $\coprod_k X_k$ es la unión disjunta.

En categoría **Top** el producto de espacios topológicos $\prod_k X_k$ es el producto de conjuntos subyacentes dotado de la topología producto. El coproducto $\coprod_k X_k$ es la unión disjunta donde cada componente viene con su topología original. ▲

12.4. Ejemplo. En la categoría de anillos con identidad **Ring** el producto $\prod_k R_k$ es el producto cartesiano con las operaciones definidas por

$$(r_k)_k + (r_k')_k := (r_k + r_k')_k, \quad (r_k)_k \cdot (r_k')_k := (r_k \cdot r_k')_k.$$

El elemento nulo es $(0_{R_k})_k$ y la identidad es $(1_{R_k})_k$. Las proyecciones $p_k \colon (r_k)_k \mapsto r_k$ son visiblemente homomorfismos de anillos.

El coproducto en la categoría de anillos con identidad es algo diferente: note que las inclusiones $r \mapsto (0, \dots, 0, r, 0, \dots, 0)$ no preservan la identidad. En la categoría de anillos conmutativos **CRing** el coproducto es el producto tensorial. ▲

12.5. Ejemplo. No todas categorías tienen productos y coproductos. Notemos que en la categoría de cuerpos, $\operatorname{Hom}(L,K) = \emptyset$ si L y K son cuerpos de característica diferente. Si $\operatorname{char} L_1 \ne \operatorname{char} L_2$, su producto $L_1 \times L_2$ (resp. coproducto $L_1 \sqcup L_2$) no existe, ya que no pueden existir ambos morfismos canónicos $L_1 \times L_2 \to L_1$ y $L_1 \times L_2 \to L_2$ (resp. $L_1 \to L_1 \sqcup L_2$ y $L_2 \to L_1 \sqcup L_2$). ▲

12.6. Ejemplo. En la categoría de grupos **Grp** el producto $\prod_k G_k$ es el producto de conjuntos dotado de la multiplicación término por término

$$(g_k)_k \cdot (h_k)_k := (g_k \cdot h_k)_k.$$

El coproducto de grupos es algo muy diferente: es el producto libre $\mathop{\ast}_k G_k$.

En la categoría de grupos abelianos **Ab** el producto es el mismo, mientras que el coproducto es la suma directa (compuesta de sumas formales finitas de elementos).

$$\bigoplus_k A_k := \Big\{ \sum_k a_k \;\Big|\; a_k \in A_k,\ a_k = 0,\ \text{salvo un número finito de } k \Big\}.$$ ▲

He aquí otro modo de definir productos y coproductos en términos de funtores representables.

12.7. Observación. *Sea $Z \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ un objeto fijo. El funtor covariante $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,-)$ preserva productos y el funtor contravariante $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-,Z)$ convierte coproductos en productos. Es decir, si existe el producto $\prod_{k\in I} X_k$, entonces hay una biyección natural entre conjuntos*

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, \prod_{k\in I} X_k) &\cong \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X_k), \\ f &\mapsto (p_k \circ f)_{k\in I}, \end{aligned} \tag{12.1}$$

Si existe el coproducto $\coprod_{k\in I} X_k$, entonces hay una biyección natural entre conjuntos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_{k\in I} X_k, Z) &\cong \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, Z), \\ f &\mapsto (f \circ i_k)_{k\in I}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

En otras palabras, $\prod_{k\in I} X_k$ es un objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned} \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_k)\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} &\to \mathbf{Set}, \\ Z &\mapsto \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X_k). \end{aligned}$$

y $X \sqcup Y$ es un objeto que representa al funtor

$$\begin{aligned} \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, -)\colon \mathscr{C} &\to \mathbf{Set}, \\ Z &\mapsto \prod_{k\in I} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, Z). \end{aligned}$$

Demostración. Las biyecciones (12.1) y (12.2) son otro modo de formular la definición de producto y coproducto. La aplicación inversa viene dada por la propiedad universal. La naturalidad en Z es también evidente: para todo morfismo $h\colon Z \to Z'$ se tienen diagramas conmuativos

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, \prod_k X_k) \arrow[r, "\cong"] & \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z, X_k) \\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z', \prod_k X_k) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u] & \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z', X_k) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_k X_k, Z) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, Z) \arrow[d] \\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_k X_k, Z') \arrow[r, "\cong"] & \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, Z') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f \circ h \arrow[r, mapsto] & (p_k \circ f \circ h)_k \\ f \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & (p_k \circ f)_k \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & (f \circ i_k)_k \arrow[d, mapsto] \\ h \circ f \arrow[r, mapsto] & (h \circ f \circ i_k)_k \end{tikzcd}$$

■

Entonces, los productos y coproductos pueden ser *definidos* como objetos que representan a los funtores $\prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_k)$ y $\prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, -)$.

12.8. Observación. *Si un producto $\prod_k X_k$ (resp. coproducto $\coprod_k X_k$) existe, es único salvo isomorfismo único.*

Demostración. Es una propiedad general de funtores representables que hemos probado en 6.3. El lector también puede deducirla directamente de la definición de producto y coproducto. ■

12.9. Observación. *Los productos y coproductos satisfacen las siguientes propiedades.*

1) Los productos y coproductos son conmutativos (cuando existen):

$$X_1 \times X_2 \cong X_2 \times X_1 \quad \text{y} \quad X_1 \sqcup X_2 \cong X_2 \sqcup X_1.$$

2) Los productos y coproductos son asociativos (cuando existen):

$$(X_1 \times X_2) \times X_3 \cong X_1 \times (X_2 \times X_3) \cong X_1 \times X_2 \times X_3$$

y

$$(X_1 \sqcup X_2) \sqcup X_3 \cong X_1 \sqcup (X_2 \sqcup X_3) \cong X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3.$$

Demostración. Sigue de la propiedad universal del producto y coproducto (ejercicio para el lector), o de isomorfismos de funtores

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_1) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_2) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_2) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X_1), \\ \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_1, -) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_2, -) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_2, -) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_1, -), \end{aligned}$$

etcétera. ■

Terminamos esta sección con una propiedad importante de los funtores adjuntos.

12.10. Observación. *Sea $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ un funtor adjunto por la izquierda a $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$. Entonces F preserva coproductos y G preserva productos, es decir para cualesquiera $X_k \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ e $Y_k \in \operatorname{Ob}(\mathscr{D})$*

$$\begin{aligned} F(\coprod_k X_k) &\cong \coprod_k F(X_k), \\ G(\prod_k Y_k) &\cong \prod_k G(Y_k) \end{aligned}$$

(siempre y cuando estos productos y coproductos existan).

Demostración. Como hemos observado en 12.7, para cualquier objeto Z tenemos isomorfismos de funtores

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(\coprod_k X_k, -) &\cong \prod_k \operatorname{Hom}(X_k, -), \\ \operatorname{Hom}(-, \prod_k Y_k) &\cong \prod_k \operatorname{Hom}(-, Y_k). \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(\coprod_k X_k), -) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\coprod_k X_k, G(-)) \cong \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X_k, G(-)) \cong \prod_k \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X_k), -) \\ \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(\coprod_k F(X_k), -) \end{aligned}$$

y el lema de Yoneda implica que $F(\coprod_k X_k) \cong \coprod_k F(X_k)$. De modo similar se demuestra el isomorfismo $G(\prod_k Y_k) \cong \prod_k G(Y_k)$. ■

12.11. Ejemplo. Hay biyecciones canónicas de conjuntos

$$\Big(\coprod_k Y_k\Big) \times X \cong \coprod_k (Y_k \times X), \quad \Big(\prod_k Z_k\Big)^X \cong \prod_k (Z_k)^X. \qquad \blacktriangle$$

12.12. Ejemplo. El grupo de unidades de un producto de anillos es el producto de grupos de unidades:

$$\Big(\prod_k R_k\Big)^\times \cong \prod_k R_k^\times. \qquad \blacktriangle$$

13.13. Ejemplo. La abelianización del producto libre de grupos es la suma directa de las abelianizaciones correspondientes:

$$\Big(\mathop{\ast}_k G_k\Big)^{ab} \cong \bigoplus_k (G_k)^{ab}.$$

El producto en la categoría de grupos abealianos **Ab** coincide con el producto en la categoría de grupos **Grp** porque la inclusión **Ab** $\hookrightarrow$ **Grp** es un funtor adjunto por la derecha. ▲

13 Productos y coproductos fibrados

En álgebra y geometría (y sobre todo en geometría algebraica) tiene mucha importancia el punto de vista **relativo**. En cualquier categoría $\mathscr{C}$ podemos fijar un objeto Z y considerar los **objetos sobre** Z, es decir, objetos X junto con un morfismo especificado $X \to Z$, y los **morfismos sobre** Z que son diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

De la misma manera, los **objetos bajo** Z vienen con morfismos $Z \to X$ y los **morfismos bajo** Z son diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr] & & Y \end{tikzcd}$$

Para objetos sobre Z o bajo Z existen construcciones universales denominadas **producto fibrado** y **coproducto fibrado**, respectivamente.

13.1. Definición. Si tenemos morfismos $X \to Z$ y $Y \to Z$, entonces el **producto fibrado de** X **e** Y **sobre** Z es un objeto $X \times_Z Y$ con morfismos $X \times_Z Y \to X$ y $X \times_Z Y \to Y$ que forman parte del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

Además se pide la siguiente propiedad universal: si V es otro objeto junto con morfismos $V \to X$ y $V \to Y$ que conmutan con los morfismos $X \to Z$ y $Y \to Z$, entonces existe un único morfismo $V \to X \times_Z Y$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\
& X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

13.2. Comentario. En inglés el producto fibrado también se llama “pullback”. El símbolo “$\lrcorner$” en el cuadrado de arriba significa que es el cuadrado del producto fibrado, es decir que no es simplemente un cuadrado conmutativo, sino también universal. También se dice que es un **cuadrado cartesiano**, pero no vamos a usar esta terminología.

La notación $X \times_Z Y$ es un poco ambigua: este objeto depende no solamente de X, Y, Z, sino de morfismos específicos $X \to Z$ e $Y \to Z$. Además, este objeto está bien definido solo salvo isomorfismo.

13.3. Ejemplo. En la categoría de conjuntos, el producto fibrado de $f\colon X \to Z$ y $g\colon Y \to Z$ es el conjunto

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

y los morfismos $X \times_Z Y \to X$ y $X \times_Z Y \to Y$ están inducidos por las proyecciones.

En particular, si X e Y son subconjuntos de Z, entonces $X \times_Z Y$ puede ser identificado con $X \cap Y \subseteq Z$:

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, hook] \\
X \arrow[r, hook] & Z
\end{tikzcd}$$

En las categorías de conjuntos con estructura adicional los productos fibrados tienen una descripción parecida. ▲

A partir de la propiedad universal, se deduce que

1) si el producto fibrado $X \times_Z Y$ existe, es único salvo isomorfismo;

2) el producto fibrado es conmutativo: $X \times_Z Y \cong Y \times_Z X$;

3) el producto fibrado es asociativo: $(X_1 \times_Z X_2) \times_Z X_3 \cong X_1 \times_Z (X_2 \times_Z X_3)$.

4) los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Y \to Z$ es un isomorfismo, entonces $X \times_Z Y \to X$ es también un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Cada concepto en la teoría de categorías tiene su dual: basta cambiar las direcciones de las flechas en la definición. Así tenemos monomorfismos y epimorfismos, productos y coproductos, etc. De la misma manera, la noción dual a los productos fibrados son los coproductos fibrados.

13.4. Definición. Si tenemos morfismos $Z \to X$ y $Z \to Y$, entonces el **coproducto fibrado de X e Y bajo Z** es un objeto $X \sqcup_Z Y$ junto con morfismos $X \to X \sqcup_Z Y$ y $Y \to X \sqcup_Z Y$ que forman parte del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & X \sqcup_Z Y \end{tikzcd}$$

Además se pide la siguiente propiedad universal: si V es otro objeto junto con morfismos $X \to V$ y $Y \to V$ que conmutan con los morfismos $Z \to X$ y $Z \to Y$, entonces existe un único morfismo $X \sqcup_Z Y \to V$ tal que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ X \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] \arrow[drr, bend right] & X \sqcup_Z Y \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & V \end{tikzcd}$$

13.5. Comentario. En inglés el coproducto fibrado también se llama “pushout”. El símbolo “$\lrcorner$” en el cuadrado significa que es universal en el sentido de arriba. También se dice que es un **cuadrado cocartesiano**. Otro término posible es **suma amalgamada** (!).

13.6. Ejemplo. En la categoría de conjuntos, el coproducto fibrado de $f\colon Z \to X$ y $g\colon Z \to Y$ es el conjunto

$$X \sqcup_Z Y = (X \sqcup Y)/\sim,$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia generada* por

$$i_1 \circ f(z) \sim i_2 \circ g(z).$$

En particular, si X e Y son subconjuntos de otro conjunto W y Z es su intersección, entonces $X \sqcup_Z Y$ puede ser identificado con $X \cup Y$:

$$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner"] & X \cup Y \end{tikzcd}$$

En categorías de conjuntos con estructura adicional los coproductos fibrados tienen descripción parecida. ▲

A partir de la propiedad universal, se deduce que

1) si el coproducto fibrado $X \sqcup_Z Y$ existe, es único salvo isomorfismo;

2) el coproducto fibrado es conmutativo: $X \sqcup_Z Y \cong Y \sqcup_Z X$;

3) el coproducto fibrado es asociativo: $(X_1 \sqcup_Z X_2) \sqcup_Z X_3 \cong X_1 \sqcup_Z (X_2 \sqcup_Z X_3)$.

*Es decir, se considera la relación de equivalencia más pequeña que satisface $i_1 \circ f(z) \sim i_2 \circ g(z)$.

4) los coproductos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Z \to X$ es un isomorfismo, entonces $Y \to X \sqcup_Z Y$ es también un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & Y \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r] & X \sqcup_Z Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

13.7. Observación. *Si T es un objeto terminal (resp. I es un objeto inicial), entonces $X \times_T Y \cong X \times Y$ (resp. $X \sqcup_I Y \cong X \sqcup Y$).*

Demostración. Por ejemplo, en el caso de productos fibrados, para todo $X \in \mathscr{C}$ automáticamente tenemos un único morfismo $X \to T$, y la propiedad universal de $X \times_T Y$ corresponde a la propiedad universal de $X \times Y$. ■

13.8. Observación. *Los productos fibrados preservan monomorfismos y los coproductos fibrados preservan epimorfismos:*

1) si $m\colon X \to Y$ es un monomorfismo, entonces $\overline{m}\colon X \times_Y Z \to Z$ es también un monomorfismo;

2) si $e\colon X \to Y$ es un epimorfismo, entonces $\overline{e}\colon Z \to Z \sqcup_X Y$ es también un epimorfismo.

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Z \arrow[r, tail, "\overline{m}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Z \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, tail, "m"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\overline{f}"] \\
Z \arrow[r, two heads, "\overline{e}"'] & Z \sqcup_X Y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para ver 1), si tenemos dos morfismos $g,h\colon V \to X \times_Y Z$ tales que $\overline{m} \circ g = \overline{m} \circ h$, entonces por la conmutatividad del cuadrado $m \circ \overline{f} \circ g = m \circ f \circ h$, pero m es mono, así que $\overline{f} \circ g = \overline{f} \circ h$. Ahora podemos aplicar la propiedad universal de productos fibrados:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left, "\overline{m} \circ g = \overline{m} \circ h"] \arrow[ddr, bend right, "\overline{f} \circ g = \overline{f} \circ h"'] & & \\
& X \times_Y Z \arrow[r, tail, "\overline{m}"] \arrow[d, "\overline{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Z \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, tail, "m"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Aquí la flecha punteada es única, de donde $g = h$. Para 2) el argumento es idéntico, solo hay que cambiar la dirección de todas las flechas. ■

14 Ecualizadores y coecualizadores

14.1. Definición. Sean f y g un par de morfismos $X \to Y$.

Un **ecualizador** de f y g es un objeto $\mathrm{eq}(f,g)$ junto con un morfismo $i\colon \mathrm{eq}(f,g) \to X$ tal que $f \circ i = g \circ i$ (de aquí el nombre "ecualizador") y además i es universal entre todos los morfismos que ecualizan a f y g: a saber, si $j\colon Z \to X$ es otro morfismo tal que $f \circ j = g \circ j$, entonces existe un único morfismo $Z \to \mathrm{eq}(f,g)$ que hace parte del siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{eq}(f,g) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Un **coecualizador** de f y g es un objeto $\mathrm{coeq}(f,g)$ junto con un morfismo $p\colon Y \to \mathrm{coeq}(f,g)$ tal que $p \circ f = p \circ g$ y que satisface la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & \mathrm{coeq}(f,g) \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

14.2. Observación.

1) *Si* $\mathrm{eq}(f,g)$ *existe, entonces el morfismo* $i\colon \mathrm{eq}(f,g) \to X$ *es mono y el objeto* $\mathrm{eq}(f,g)$ *es único salvo isomorfismo.*

2) *Si* $\mathrm{coeq}(f,g)$ *existe, entonces el morfismo* $p\colon Y \to \mathrm{coeq}(f,g)$ *es epi y el objeto* $\mathrm{coeq}(f,g)$ *es único salvo isomorfismo.*

Demostración. Vamos a demostrar la parte sobre $\mathrm{eq}(f,g)$ y dejo la parte sobre $\mathrm{coeq}(f,g)$ como un ejercicio (invirtiendo las flechas).

Sean $h,h'\colon Z \to \mathrm{eq}(f,g)$ dos flechas tales que $i \circ h = i \circ h'$. Tenemos $f \circ i \circ h = g \circ i \circ h$ y $f \circ i \circ h' = g \circ i \circ h'$, y por la propiedad universal del ecualizador, existen únicos morfismos $\ell, \ell'\colon Z \to \mathrm{eq}(f,g)$ tales que $i \circ h = i \circ \ell$ y $i \circ h' = i \circ \ell'$. Entonces $\ell = \ell' = h = h'$.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & \mathrm{eq}(f,g) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Ahora sean E y E' dos objetos con morfismos $i\colon E \to X$ y $i'\colon E' \to M$ que satisfacen la propiedad universal del ecualizador. Entonces existen morfismos únicos $k\colon E' \to E$ y $\ell\colon E \to E'$ tales que $i \circ k = i'$ y $i' \circ \ell = i$. Tenemos $i \circ k \circ \ell = i \circ \mathrm{id}_E$, pero i es un monomorfismo, y por lo tanto $k \circ \ell = \mathrm{id}_E$. De modo similar, $i' \circ \ell \circ k = i' \circ \mathrm{id}_{E'}$ y $\ell \circ k = \mathrm{id}_{E'}$. Las flechas k y ℓ definen un isomorfismo $E \cong E'$. ■

14.3. Ejemplo. Para $f = g\colon X \to Y$

1) el morfismo $\mathrm{eq}(f,f) \to X$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad id_X;

2) el morfismo $Y \to \mathrm{coeq}(f,f)$ debe ser (salvo isomorfismo) el morfismo identidad id_Y. ▲

14.4. Ejemplo. En **Set** para un par de aplicaciones $f,g\colon X \to Y$ el conjunto

$$\mathrm{eq}(f,g) = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

con la inclusión $i\colon \mathrm{eq}(f,g) \hookrightarrow X$ satisface la propiedad universal del ecualizador. Luego sea $\sim$ la relación de equivalencia sobre Y generada por

$$f(x) \sim g(x) \text{ para cada } x \in X.$$

Entonces el conjunto

$$\mathrm{coeq}(f,g) = Y/\sim$$

con el morfismo de proyección $p\colon Y \twoheadrightarrow \mathrm{coeq}(f,g)$ satisface la propiedad universal del coecualizador. ▲

14.5. Observación. *Todo ecualizador (resp. coecualizador) puede ser expresado como un producto (resp. coproducto) fibrado.*

Demostración. Por ejemplo, en el caso de ecualizadores, para morfismos $f, g\colon X \to Y$ podemos considerar uno de los siguientes productos fibrados.

Primera construcción:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "\binom{\mathrm{id}}{g}"] \\ X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{f}"'] & X \times Y \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de este cuadrado ($\binom{\mathrm{id}}{f} \circ e = \binom{\mathrm{id}}{g} \circ e'$) equivale a $e = e'$ y $f \circ e = g \circ e$.

Segunda construcción:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d, "\binom{f}{g}"] \\ X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\mathrm{id}}"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

La conmutatividad de este cuadrado equivale a $f \circ e = g \circ e = e'$.

En ambos casos, la propiedad universal del producto fibrado equivale a la propiedad universal del ecualizador $e\colon E \to X$. ■

14.6. Observación. *Todo producto (resp. coproducto) fibrado puede ser expresado como un ecualizador (resp. coecualizador).*

Demostración. Necesitamos construir un producto (resp. coproducto) fibrado

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "\overline{g}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\overline{f}"] \\ X \arrow[r, "\overline{g}"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner", very near end] & X \sqcup_Z Y \end{tikzcd}$$

Lo más obvio que podemos hacer es tomar el producto y coproducto

$$X \xleftarrow{p_X} X \times Y \xrightarrow{p_Y} Y \qquad X \xrightarrow{i_X} X \sqcup Y \xleftarrow{i_Y} Y$$

y considerar los cuadrados

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "i_X"'] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner", very near end] & X \sqcup Y \end{tikzcd}$$

pero estos no tienen por qué ser conmutativos. Entonces, podemos tomar el ecualizador (resp. coecualizador) correspondiente:

$$X \times_Z Y \xrightarrow{\binom{\overline{f}}{\overline{g}}} X \times Y \overset{f \circ p_X}{\underset{g \circ p_Y}{\rightrightarrows}} Z \qquad\qquad Z \overset{i_X \circ f}{\underset{i_Y \circ g}{\rightrightarrows}} X \sqcup Y \xrightarrow{(\overline{f}, \overline{g})} X \sqcup_Z Y$$

El lector puede comprobar que en este caso la propiedad universal de (co)equializadores corresponde a la propiedad universal de (co)productos fibrados. ■

15 Límites y colímites en general

15.1. Definición. Sea $\mathscr{I}$ una categoría pequeña y sea $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ un funtor. Un **límite** de F es un objeto $\operatorname{lím}_{\mathscr{I}} F \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ con un conjunto de morfismos $\{\operatorname{lím}_{\mathscr{I}} F \to F(i)\}_{i \in \operatorname{Ob}(\mathscr{I})}$ tales que cada morfismo $i \to j$ en $\mathscr{I}$ induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{lím}_{\mathscr{I}} F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(i) \arrow[rr] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Además, pedimos la siguiente propiedad universal: si para cualquier otro objeto $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ con un conjunto de morfismos $\{X \to F(i)\}_{i \in \operatorname{Ob}(\mathscr{I})}$ que conmuta con los morfismos de $\mathscr{I}$ en el sentido de arriba existe un único morfismo $X \to \operatorname{lím}_{\mathscr{I}} F$ que da diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{lím}_{\mathscr{I}} F \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
& X \arrow[u, dashed, "\exists!"'] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
F(i) \arrow[rr] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

Un **colímite** de F es un objeto $\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ con un conjunto de morfismos $\{F(i) \to \operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F\}_{i \in \mathscr{I}}$ tales que para cada morfismo $i \to j$ en $\mathscr{I}$ hay un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr] \arrow[dr] & & F(j) \arrow[dl] \\
& \operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F &
\end{tikzcd}$$

Y se pide que $\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F$ satisfaga la propiedad universal

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & F(j) \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
& \operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

15.2. Observación. *Si un límite o colímite existe, es único salvo isomorfismo único.*

15.3. Ejemplo. Ya conocemos algunos ejemplos básicos de límites y colímites.

1) La **categoría vacía** $\emptyset$ es la categoría que no tiene ningún objeto. Trivialmente, para cualquier categoría $\mathscr{C}$ hay un funtor único $\emptyset \to \mathscr{C}$. El límite de este funtor es un objeto terminal y el colímite es un objeto inicial.

2) Sea $\mathscr{I}$ una categoría que tiene solo dos objetos 1 y 2 y ningún morfismo salvo id_1 y id_2:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] & 2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ corresponde a una elección de objetos $X_1 = F(1), X_2 = F(2) \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. El límite de F es el producto $X_1 \times X_2$ y el colímite es el coproducto $X_1 \sqcup X_2$.

De la misma manera, todo conjunto I puede ser interpretado como una categoría pequeña $\mathscr{I}$ cuyos objetos corresponden a los elementos de I y cuyos morfismos son id_i para todo $i \in I$. Un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ corresponde a una elección de una familia de objetos X_i. El límite de este funtor es el producto $\prod_i X_i$ y el colímite es el coproducto $\coprod_i X_i$.

3) Sea I la categoría

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[d] \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[r] \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] & 3 \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ corresponde a un diagrama

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

El límite de F es el producto fibrado de X e Y sobre Z

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

De la misma manera, si I es la categoría

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] & 2 \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \\ 1 \arrow[loop left, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

entonces un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ corresponde a un diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ X \end{tikzcd}$$

y el colímite de F es el coproducto fibrado de X e Y bajo Z

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\lrcorner", very near end] & X \sqcup_Z Y \end{tikzcd}$$

4) Sea $\mathscr{I}$ la categoría

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 2 \arrow[loop above, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}$$

Un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ corresponde a un diagrama

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

El límite de F es el ecualizador de f y g y el colímite es el coecualizador. ▲

Muchas categorías importantes son **completas y cocompletas**, es decir tienen límites y colímites para cualquier categoría pequeña $\mathscr{I}$. Entre ellas, la categoría de conjuntos **Set** y muchas categorías de conjuntos con estructura adicional: espacios topológicos **Top**, grupos **Grp**, anillos **Ring**, espacios vectoriales k-**Vect**, etc. En estos casos los límites y colímites tienen una descripción explícita:

$$\lim_{\mathscr{I}} F = \{(x_i) \in \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} F(i) \mid F(f)(x_i) = x_j \text{ para cada } f\colon i \to j\}.$$

$$\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F = \coprod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} F(i) \Big/ \sim,$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ es generada por

$$F(i) \ni x_i \sim F(f)(x_i) \in F(j) \text{ para todo } f\colon i \to j.$$

El lector puede hacer los ajustes (obvios) para el caso de conjuntos con estructura adicional. Por ejemplo, para espacios topológicos por $\coprod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I}} F(i)/\sim$ se entiende el espacio con la topología cociente.

15.4. Ejemplo. Consideremos los números naturales $\mathbb{N}$ con la relación $\ge$. Esto corresponde a una categoría

$$\cdots \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$$

Consideremos el funtor $F\colon \mathbb{N} \to$ **CRing** que a cada i asocia el anillo conmutativo $\mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}$ y a cada morfismo $j \to i$ donde $j \ge i$ asocia el homomorfismo de anillos $\mathbb{Z}/p^{j+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}$ que toma el resto módulo p^{i+1}. El límite de este funtor es el anillo de enteros p-ádicos:

$$\mathbb{Z}_p = \lim_{i \ge 0} \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z}.$$

En efecto, la construcción general nos dice que

$$\lim_{i \ge 0} \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} = \{(x_i) \in \prod_{i \ge 0} \mathbb{Z}/p^{i+1}\mathbb{Z} \mid x_j \equiv x_i \pmod{p^{i+1}} \text{ para cada } j \ge i\}.$$

Entonces, los elementos del límite son sucesiones $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ de restos módulo p^{i+1} que satisfacen

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv x_0 \pmod{p}, \\ x_2 &\equiv x_1 \pmod{p^2}, \\ x_3 &\equiv x_2 \pmod{p^3}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Esto significa que existen números únicos $0 \le a_i \le p-1$ tales que

$$
\begin{aligned}
& x_0 = a_0, \\
& x_1 = a_0 + a_1\, p, \\
& x_2 = a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2, \\
& x_3 = a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + a_3\, p^3, \\
& \quad \cdots
\end{aligned}
$$

De esta manera obtenemos las expansiones p-ádicas

$$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \leftrightarrow a_0 + a_1\, p + a_2\, p^2 + a_3\, p^3 + \cdots. \qquad \blacktriangle$$

15.5. Ejemplo. Consideremos los números enteros positivos $\mathbb{Z}_+$ ordenados por la relación de divisibilidad $n \ge m \iff m \mid n$. Esto da lugar a una categoría

$$
\begin{tikzcd}
\cdots & 6 \arrow[rrr, bend right] \arrow[rrrrr, bend right] & 5 \arrow[rrrr, bend left] & 4 \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & 3 \arrow[rr, bend right] & 2 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

Cuando $m \mid n$, está bien definido el homomorfismo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ que a cada resto módulo n asocia el resto módulo m correspondiente. Esto define un funtor $n \rightsquigarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ y su límite es

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \lim_{n\ge 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

llamado el **anillo de enteros profinitos**. Por el teorema chino del resto, hay isomorfismos naturales

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{k_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_s^{k_s}\mathbb{Z}, \quad \text{donde } n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}.$$

Luego,

$$\lim_{n\ge 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod_{p \text{ primo}} \lim_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p. \qquad \blacktriangle$$

15.6. Ejemplo.

1) Consideremos el funtor que a cada entero positivo n asocia el grupo simétrico S_n y a $m \le n$ asocia el monomorfismo $S_m \rightarrowtail S_n$ que extiende toda permutación σ de $\{1, 2, \ldots, m\}$ a una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ poniendo $\sigma(i) = i$ si $i > m$. El colímite correspondiente es el grupo simétrico infinito

$$S_\infty = \operatorname*{colím}_{n\ge 1} S_n.$$

Los elementos de S_∞ son permutaciones de números naturales $\mathbb{N}$ que tienen un número finito de puntos no fijos.

2) De la misma manera, a cada $m \le n$ se puede asociar un monomorfismo de grupos de matrices invertibles $\mathrm{GL}_m(R) \to \mathrm{GL}_n(R)$ poniendo 1 en la diagonal:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} A & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

El colímite es el grupo

$$\mathrm{GL}_\infty(R) = \operatorname*{colím}_{n\ge 1} \mathrm{GL}_n(R).$$

Sus elementos son las transformaciones lineales invertibles $R^{\mathbb{N}} \to R^{\mathbb{N}}$ donde cada una afecta solamente un número finito de vectores de la base.

3) Los grupos de las raíces de la unidad

$$\mu_n(\mathbb{C}) := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

vienen con inclusiones naturales $\mu_m(\mathbb{C}) \subset \mu_n(\mathbb{C})$ para $m \mid n$. El colímite correspondiente es el grupo de todas las raíces de la unidad

$$\mu_\infty(\mathbb{C}) = \operatorname*{colím}_{n\ge 1} \mu_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{n\ge 1} \mu_n(\mathbb{C}).$$

Este grupo es isomorfo al grupo cociente $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: el homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &\to \mu_\infty(\mathbb{C}),\\ m/n &\to e^{2\pi i\, m/n} \end{aligned}$$

es sobreyectivo y tiene $\mathbb{Z}$ como su núcleo. Tenemos

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \operatorname*{colím}_{n\ge 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \qquad \blacktriangle$$

15.7. Observación. *El* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,-)$ *covariante preserva límites: hay una biyección natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \lim_{i\in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} F(i)) \cong \lim_{i\in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, F(i)).$$

El $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,X)$ *contravariante convierte colímites en límites: hay una biyección natural*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname*{colím}_{i\in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} F(i), X) \cong \lim_{i\in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(i), X).$$

En otras palabras, $\lim_{\mathscr{I}} F$ *es el objeto que representa al funtor contravariante* $\lim_{i\in\mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,F(i))$ *y* $\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F$ *es el objeto que representa al funtor covariante* $\lim_{i\in\mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(F(i),-)$.

Demostración. Se verifica directamente a partir de las definiciones. ■

En particular, si $\lim_{\mathscr{I}} F$ (resp. $\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F$) existe, es único salvo isomorfismo por las propiedades generales de funtores adjuntos.

15.8. Observación. *Todo funtor adjunto por la izquierda preserva colímites, y todo funtor adjunto por la derecha preserva límites. A saber, sea* $L\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ *adjunto por la izquierda a* $R\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$*:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(Y)).$$

Sea $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ *algún funtor y sea* $\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ *su colímite. Entonces, hay un isomorfismo natural*

$$L(\operatorname*{colím}_{\mathscr{I}} F) \cong \operatorname*{colím}_{\mathscr{I}} (L\circ F).$$

De modo similar, para un funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{D}$ *hay un isomorfismo natural*

$$R(\lim_{\mathscr{I}} F) \cong \lim_{\mathscr{I}} (R\circ F).$$

En particular, un funtor adjunto por la izquierda preserva coproductos, coproductos fibrados, coecualizadores, etc., y un funtor adjunto por la derecha preserva productos, productos fibrados, ecualizadores, etc. Es una generalización de 12.10, y la demostración es idéntica.

Demostración. Por ejemplo, en el caso de límites, tenemos para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ isomorfismos naturales

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, R(\varprojlim_{\mathscr{I}} F)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), \varprojlim_{\mathscr{I}} F) \quad \text{por la adjunción entre } L \text{ y } R \\
&\cong \varprojlim_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(L(X), F(i)) \quad \text{por 15.7} \\
&\cong \varprojlim_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, R(F(i))) \quad \text{por la adjunción} \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X, \varprojlim_{\mathscr{I}} (R \circ F)) \quad \text{por 15.7.}
\end{aligned}$$

Entonces el lema de Yoneda implica

$$R(\varprojlim_{\mathscr{I}} F) \cong \varprojlim_{\mathscr{I}} (R \circ F).$$ ■

15.9. Proposición. *Todo límite (resp. límite finito) puede ser expresado por productos y ecualizadores (resp. productos finitos y ecualizadores). Todo colímite (resp. colímite finito) puede ser expresado por coproductos y coecualizadores (resp. coproductos finitos y coecualizadores).*

Aquí el producto (resp. coproducto) vacío se considera como un objeto terminal (resp. inicial).

Demostración. Sea $\mathscr{I}$ una categoría pequeña y sea $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ un funtor. Sea $\mathrm{Hom}(\mathscr{I})$ el conjunto de morfismos de $\mathscr{I}$. Para todo morfismo $f\colon i \to j$ denotemos

$$\mathrm{cod}(f) := j.$$

Consideremos los siguientes productos sobre todos los objetos en $\mathscr{I}$ y todos los morfismos en $\mathscr{I}$:

$$\begin{aligned}
\Pi &:= \prod_{i \in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})} F(i), \\
\vec{\Pi} &:= \prod_{f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{I})} F(\mathrm{cod}(f))
\end{aligned}$$

Estos productos vienen con las proyecciones

$$p_i\colon \Pi \to F(i), \quad \vec{p}_f\colon \vec{\Pi} \to F(\mathrm{cod}(f)).$$

Por la propiedad universal de $\vec{\Pi}$ existes morfismos únicos $\alpha, \beta\colon \Pi \to \vec{\Pi}$ tales que para todo $f\colon i \to j$ en $\mathrm{Hom}(\mathscr{I})$ se cumple

$$\begin{aligned}
\vec{p}_f \circ \alpha &= p_j, \\
\vec{p}_f \circ \beta &= F(f) \circ p_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[d, dashed, "\alpha"', "\exists!"] \arrow[dr, "p_j"] & \\
\vec{\Pi} \arrow[r, "\vec{p}_f"'] & F(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Pi \arrow[r, "p_i"] \arrow[d, dashed, "\beta"', "\exists!"] & F(i) \arrow[d, "F(f)"] \\
\vec{\Pi} \arrow[r, "\vec{p}_f"'] & F(j)
\end{tikzcd}$$

Consideremos el ecualizador

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & \Pi \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \vec{\Pi}
\end{tikzcd}$$

Vamos a probar que E junto con morfismos $p_i \circ e\colon E \to F(i)$ es el límite de F. Primero, notamos que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "p_i \circ e"'] \arrow[dr, "p_j \circ e"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j)
\end{tikzcd}$$

conmutan para todo $f\colon i \to j$. En efecto,

$$F(f)\circ p_i\circ e = \vec{p}_f\circ\beta\circ e = \vec{p}_f\circ\alpha\circ e = p_j\circ e.$$

Ahora sea X otro objeto con morfismos $q_i\colon X\to F(i)$ que hacen conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_j"] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal de Π, existe un morfismo único $\gamma\colon X\to\Pi$ tal que

$$q_i = p_i\circ\gamma$$

para todo $i\in \mathrm{Ob}(\mathscr{I})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\gamma"', "\exists!"] \arrow[dr, "q_i"] & \\ \Pi \arrow[r, "p_i"'] & F(i) \end{tikzcd}$$

Ahora para todo $f\colon i\to j$ tenemos

$$\vec{p}_f\circ\alpha\circ\gamma = p_j\circ\gamma = q_j = F(f)\circ q_i = F(f)\circ p_i\circ\gamma = \vec{p}_f\circ\beta\circ\gamma.$$

Esto significa que $\alpha\circ\gamma = \beta\circ\gamma$, y la propiedad universal del ecualizador E implica que existe un morfismo único $\delta\colon X\to E$ tal que $e\circ\delta = \gamma$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & \Pi \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \vec{\Pi} \\ X \arrow[u, dashed, "\exists!"] \arrow[ur, "\delta"'] & & \end{tikzcd}$$

Luego, $q_i = p_i\circ\gamma = p_i\circ e\circ\delta$, así que los diagramas

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddl, "q_i"'] \arrow[ddr, "q_j"] & \\ & E \arrow[dl, "p_i\circ e"] \arrow[dr, "p_j\circ e"'] & \\ F(i) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(j) \end{tikzcd}$$

conmutan. Falta solo ver que el morfismo δ es único. Sea $\delta'\colon X\to E$ otro morfismo tal que $q_i = p_i\circ e\circ\delta'$ para todo $i\in\mathrm{Ob}(\mathscr{I})$. Entonces,

$$p_i\circ e\circ\delta = p_i\circ\gamma = q_i = p_i\circ e\circ\delta',$$

lo que implica que $e\circ\delta = e\circ\delta'$. El morfismo e es mono, siendo un ecualizador, y por lo tanto $\delta=\delta'$. ■

15.10. Corolario. *Todo límite finito (resp. colímite finito) puede ser expresado por productos fibrados y objetos terminales (resp. coproductos fibrados y objetos iniciales).*

Demostración. Como hemos notado en 13.7, los productos (resp. coproductos) son productos (resp. coproductos) fibrados sobre un objeto terminal (resp. inicial). En 14.5 hemos visto que los ecualizadores (resp. coecualizadores) pueden ser expresados como productos (resp. coproductos) fibrados. ■

16 Equivalencias de categorías

Dos categorías comparten las mismas propiedades cuando son equivalentes.

16.1. Definición. Se dice que un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una **equivalencia de categorías** si existe otro funtor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que

$$\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \cong G \circ F \quad \text{y} \quad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}.$$

Esto significa que para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ tenemos isomorfismos $\eta_X\colon X \to GF(X)$ y para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ tenemos isomorfismos $\epsilon_A\colon FG(A) \to A$, de tal modo que para todo morfismo $f\colon X \to Y$ en $\mathscr{C}$ y todo morfismo $h\colon A \to B$ en $\mathscr{D}$ los siguientes cuadrados conmutan:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X", "\cong"'] \arrow[d, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y", "\cong"'] & GF(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FG(A) \arrow[r, "\epsilon_A", "\cong"'] \arrow[d, "FG(h)"'] & A \arrow[d, "h"] \\ FG(B) \arrow[r, "\epsilon_B", "\cong"'] & B \end{tikzcd}$$

Aquí se pide que las composiciones $G \circ F$ y $F \circ G$ sean *isomorfas* a funtores identidad. Cuando tenemos *igualdades* $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, se dice que las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son **isomorfas**. Aunque el isomorfismo de categorías parece algo más natural, en practica es inútil ya que exige una biyección entre objetos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ que preserva los morfismos, es decir que $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son en esencia idénticas. La equivalencia de categorías es algo mucho más interesante y quiere decir que existe una biyección entre *clases de isomorfismo* de objetos de $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ y biyecciones entre morfismos.

16.2. Ejemplo. Consideremos la categoría de espacios vectoriales sobre k de dimensión finita k-**vect**. Como sabemos del álgebra lineal, dos espacios vectoriales U y V son isomorfos si y solamente si $\dim_k U = \dim_k V$. Así, escogiendo una base, para cada espacio vectorial V podemos escoger un isomorfismo $V \cong k^d$. Esto define una equivalencia entre la categoría k-**vect** y la categoría cuyos objetos son k^n para $n \in \mathbb{N}$ y los morfismos son las aplicaciones lineales $k^n \to k^m$; es decir matrices de $m \times n$. La categoría k-**vect** no es pequeña porque para cada espacio vectorial el conjunto subyacente puede ser cualquier cosa, entonces todos los espacios vectoriales (aún de dimensión finita) no forman un conjunto. Sin embargo, los espacios vectoriales k^d forman un conjunto, entonces una categoría pequeña. Los cursos básicos del álgebra lineal tratan precisamente de esta equivalencia de categorías. ▲

16.3. Ejemplo. Para la categoría k-**vect** de espacios vectoriales de dimensión finita el funtor del espacio vectorial dual nos da un isomorfismo natural

$$\mathrm{ev}_V\colon V \cong (V^*)^*.$$

Aquí uno de los "$*$" denota el funtor $k\text{-}\mathbf{vect} \to k\text{-}\mathbf{vect}^{\mathrm{op}}$ y otro "$*$" denota el funtor $k\text{-}\mathbf{vect}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{vect}$. El isomorfismo de arriba corresponde a los isomorfismos de funtores

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{k\text{-}\mathbf{vect}} \Rightarrow * \circ *, \quad \epsilon\colon * \circ * \Rightarrow \mathrm{Id}_{k\text{-}\mathbf{vect}^{\mathrm{op}}}.$$

Entonces tenemos una equivalencia de categorías

$$k\text{-}\mathbf{vect} \simeq k\text{-}\mathbf{vect}^{\mathrm{op}}.$$

No existe ningún isomorfismo *natural* $V \cong V^*$, porque V y V^* son objetos de diferentes categorías. De hecho, el isomorfismo $V \cong V^*$ que normalmente se estudia en cursos del álgebra lineal depende de una base fija de V, o de otros datos suplementarios (por ejemplo, una forma bilineal no degenerada fija $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to k$). ▲

He aquí una caracterización útil de las equivalencias.

16.4. Proposición. *Un funtor $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ define una equivalencia de categorías si y solamente si*

1) F es fielmente pleno;

2) F es ***esencialmente sobreyectivo****: para cada objeto $Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ existe algún objeto $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ tal que $F(X) \cong Y$.*

Demostración. Si F es una equivalencia de categorías, es fácil comprobar que F cumple las condiciones 1) y 2). De hecho, por la definición de equivalencia, tenemos otro funtor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ junto con un isomorfismos de funtores $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \cong G \circ F$ y $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, es decir, familias de isomorfismos naturales $\eta_X\colon X \xrightarrow{\cong} GF(X)$ y $\epsilon_Y\colon FG(Y) \xrightarrow{\cong} Y$.

El hecho de que cada equivalencia de categorías sea esencialmente sobreyectiva es inmediato: para todo $Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ tenemos isomorfismo $FG(Y) \cong Y$.

Para ver que la aplicación $f \mapsto F(f)$ es inyectiva, notemos que $F(f) = F(f')$ implica en particular $GF(f) = GF(f')$, y luego se ve que $f = f'$ desde el cuadrado conmutativo de abajo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X", "\cong"'] \arrow[d, shift right, "f'"'] \arrow[d, shift left, "f"] & GF(X) \arrow[d, "GF(f)=GF(f')"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}", "\cong"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

$$f = \eta_{X'}^{-1} \circ GF(f) \circ \eta_X = \eta_{X'}^{-1} \circ GF(f') \circ \eta_X = f'.$$

Para ver que la aplicación $f \mapsto F(f)$ es sobreyectiva, será suficiente notar que para todo morfismo $g\colon F(X) \to F(X')$ en $\mathscr{D}$ existe un morfismo f en $\mathscr{C}$ tal que $GF(f) = G(g)$, porque, como acabamos de ver, la aplicación $g \mapsto G(g)$ es inyectiva (por el mismo argumento aplicado a G). Se ve que podemos considerar $f := \eta_{X'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_X$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X", "\cong"'] \arrow[d, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "G(g)=GF(f)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}", "\cong"'] & GF(X')
\end{tikzcd}$$

$$GF(f) = \eta_{X'} \circ f \circ \eta_X^{-1} = \cancel{\eta_{X'} \circ \eta_{X'}^{-1}} \circ G(g) \circ \cancel{\eta_X \circ \eta_X^{-1}} = G(g).$$

Ahora tenemos que ver que las condiciones 1) y 2) nos permiten construir un funtor $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ tal que $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ y $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.

Si F es fielmente pleno y esencialmente sobreyectivo, para cada $Y \in \operatorname{Ob}(\mathscr{D})$ tenemos una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-), F(X)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(-, X).$$

Entonces el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(-), Y)$ está representado por algún $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$, y por lo tanto existe un funtor G que es adjunto por la derecha a F (véase 7.3): existe una biyección natural

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

Tenemos las transformaciones naturales correspondientes (véase 8.1)

$$\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow G \circ F, \quad \epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}.$$

De hecho η y ϵ son isomorfismos de funtores. Por ejemplo, veamos que $\eta_X\colon X \to GF(X)$ es un isomorfismo. Para $X' \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ apliquemos el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X', -)$. Tenemos un morfismo

$$\eta_X^*\colon \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X', X) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X', GF(X)).$$

Pero este no es otra cosa que la composición de las biyecciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X'), F(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X', GF(X))$$

(la primera porque F es fielmente pleno, la segunda por la adjunción). Entonces η_X^* es un isomorfismo natural para cada $X' \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, y el lema de Yoneda implica que η_X es un isomorfismo. De modo similar, para ver que $\epsilon_Y\colon FG(Y) \to Y$ es un isomorfismo, apliquemos el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), -)$:

$$\epsilon_Y^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), FG(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y).$$

Este es la composición de las biyecciones naturales

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), FG(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y).$$ ■

16.5. Observación. *Sean $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y $G\colon \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ dos funtores que definen una equivalencia de categorías, junto con transformaciones naturales $\eta\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \Rightarrow G \circ F$ y $\epsilon\colon F \circ G \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. Entonces*

1) *F es adjunto por la izquierda a G, la unidad de la adjunción siendo η_X,*
2) *G es adjunto por la izquierda a F, la counidad de la adjunción siendo η_X^{-1}.*

Demostración. Por ejemplo, en el caso 1) tenemos que compobar que la aplicación

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)),\\ f \mapsto G(f) \circ \eta_X\end{gathered}$$

es una biyección natural. En efecto, $G(-)$ es una biyección porque G es fielmente pleno, y $- \circ \eta_X$ es una biyección porque η_X es un isomorfismo. La naturalidad en X e Y es un ejercicio para el lector (use la funtorialidad de G y naturalidad de η_X). ■

16.6. Corolario. *Una equivalencia de categorías $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ preserva todos los límites y colímites.*

17 El teorema de los ceros como una equivalencia de categorías

En esta sección me gustaría presentar un ejemplo detallado y no trivial de equivalencia de categorías. Recordemos un poco de la geometría algebraica elemental. Sea k un cuerpo.

1) Para un ideal $\mathfrak{a} \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ el **conjunto algebraico afín** correspondiente es dado por los ceros comunes de los polinomios en $\mathfrak{a}$:

$$V(\mathfrak{a}) := \{\underline{x} \in \mathbb{A}^n(k) \mid f(\underline{x}) = 0 \text{ para todo } f \in \mathfrak{a}\} \subseteq \mathbb{A}^n(k).$$

2) Para un subconjunto $X \subset \mathbb{A}^n(k)$, se puede considerar el ideal de los polinomios que se anulan sobre X:

$$I(X) := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f(\underline{x}) = 0 \text{ para todo } \underline{x} \in X\}.$$

3) El **teorema de los ceros de Hilbert** dice que cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado, se cumple

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f^n \in \mathfrak{a} \text{ para algún } n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

A priori, un conjunto algebraico afín es nada más un subconjunto $V \subset \mathbb{A}^n(k)$. Para tener una estructura más interesante, podemos definir qué es un morfismo entre conjuntos algebraicos afines. Primero, para un conjunto algebraico afín $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ se puede considerar las **funciones polinomiales** sobre V. Son los polinomios restringidos a V. En este caso nos gustaría decir que $f = g$ si la diferencia $f - g$ es nula sobre V. Esto explica la siguiente definición.

17.1. Definición. Para un conjunto algebraico afín $V \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ su **álgebra de funciones polinomiales** es dada por

$$k[V] := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V).$$

Recordemos que un ideal $\mathfrak{a} \subseteq A$ es **radical** si $\sqrt{\mathfrak{a}} = A$. Esto es equivalente a decir que el anillo cociente $A/\mathfrak{a}$ es **reducido** (no tiene nilpotentes no nulos). El ideal $I(V)$ es siempre radical, así que $k[V]$ es un anillo reducido.

17.2. Definición. Una k**-álgebra afín** A es un anillo reducido de la forma $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$ para algún ideal $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$.

Ahora podemos considerar las aplicaciones entre conjuntos algebraicos afines definidos por las funciones polinomiales.

17.3. Definición. Sean $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ y $W \subset \mathbb{A}^m(k)$ dos conjuntos algebraicos afines. Una **aplicación polinomial** $\phi\colon V \to W$ es una aplicación que tiene coordenadas polinomiales; es decir,

$$\phi(\underline{x}) = (\phi_1(\underline{x}), \ldots, \phi_m(\underline{x})), \quad \text{donde } \phi_i \in k[V].$$

Una aplicación polinomial entre dos conjuntos algebraicos afines $\phi\colon V\colon \to W$ donde $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ y $W \subset \mathbb{A}^m(k)$ induce un homomorfismo de álgebras $k[W] \to k[V]$ que va *en la dirección opuesta*:

$$\phi\colon V \to W \quad \rightsquigarrow \quad \phi^*\colon k[W] \to k[V].$$

A saber, un elemento $f \in k[W]$ es un polinomio en m variables $f(Y_1, \ldots, Y_m)$ considerado módulo $I(W)$. Luego, la aplicación ϕ es dada por m polinomios

$$\phi_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, \phi_m(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]/I(V).$$

Así que f puede ser evaluado en $Y_i = \phi_i$. Esto nos da una aplicación bien definida

$$\begin{aligned}\phi^*\colon k[Y_1, \ldots, Y_m]/I(W) &\to k[X_1, \ldots, X_n]/I(V),\\ f(Y_1, \ldots, Y_m) &\mapsto f(\phi_1(X_1, \ldots, X_n), \ldots, \phi_m(X_1, \ldots, X_n)).\end{aligned}$$

17.4. Observación. *Los conjuntos algebraicos afines y aplicaciones polinomiales forman una categoría k-***ConjAf***. Las k-álgebras afines forman una categoría k-***ÁlgAf***, que es una subcategoría plena de la categoría k-***Álg** *de todas las k-álgebras. La formación del álgebra de funciones polinomiales es un funtor contravariante*

$$k\text{-}\mathbf{ConjAf}^{\mathrm{op}} \to k\text{-}\mathbf{\acute{A}lgAf}.$$

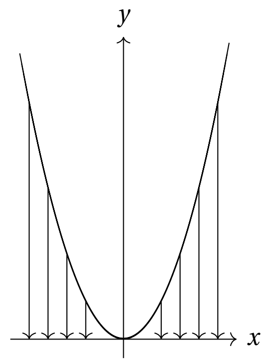
Este funtor es fielmente pleno.

Demostración. Ejercicio para el lector. ■

17.5. Ejemplo. Para un conjunto algebraico afín $V \subset \mathbb{A}^n(k)$ especificar un punto $x_0 \in V$ es lo mismo que especificar una aplicación $i\colon \mathbb{A}^0(k) \hookrightarrow V$ entre un punto $\mathbb{A}^0(k) = \{*\}$ y V tal que $i(*) = x_0$. Estos morfismos son obviamente polinomiales y corresponden de modo biyectivo a homomorfismos de k-álgebras $k[V] \to k$. El núcleo de este homomorfismo es un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset k[V]$.

Si k es algebraicamente cerrado (!), una de las versiones del teorema de los ceros nos dice que todos los ideales maximales de $k[V]$ surgen de esta manera, mas esto es falso si $k \neq \overline{k}$. ▲

17.6. Ejemplo. Consideremos el conjunto algebraico afín $V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2(k)$. Es una parábola. La proyección al eje x definida por $\phi\colon (x, y) \mapsto x$ es una aplicación polinomial $V \to \mathbb{A}^1(k)$. Se ve que esta posee una aplicación inversa $x \mapsto (x, x^2)$ que es también polinomial. Entonces, la parábola y la recta son isomorfas en la categoría de conjuntos algebraicos afines.



Esto se traduce al isomorfismo de anillos

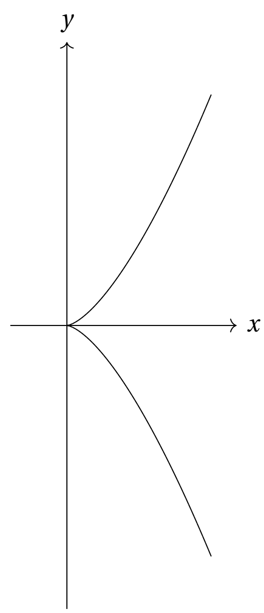
$$k[X,Y]/(Y-X^2) \cong k[T].$$

En efecto, la aplicación $t \mapsto (t,t^2)$ entre $\mathbb{A}^1(k)$ y V induce un isomorfismo

$$\begin{aligned} k[X,Y]/(Y-X^2) &\to k[T], \\ X &\mapsto T, \\ Y &\mapsto T^2. \end{aligned}$$

▲

17.7. Ejemplo. Consideremos el conjunto algebraico afín $V = V(Y^2 - X^3)$ en $\mathbb{A}^2(k)$. Es una curva cúbica con una cúspide en el punto $(0,0)$:



Podemos considerar una aplicación polinomial $\phi\colon \mathbb{A}^1(k) \to V$ por $t \mapsto (t^2,t^3)$. Esta induce un homomorfismo de k-álgebras correspondientes

$$\begin{aligned} \phi^*\colon k[X,Y]/(Y^2-X^3) &\to k[T], \\ X &\mapsto T^2, \\ Y &\mapsto T^3. \end{aligned}$$

Note que ϕ es una *biyección de conjuntos*, pero no es un isomorfismo. Por ejemplo, se puede notar que la aplicación ϕ^* es inyectiva pero no es sobreyectiva: su imagen es el álgebra $k[T^2, T^3]$ formada por los polinomios en T^2 y T^3.

De hecho, las álgebras $k[X,Y]/(Y^2 - X^2) \cong k[T^2, T^3]$ y $k[T]$ no son isomorfas y por lo tanto V y $\mathbb{A}^1(k)$ no son isomorfos en la categoría de conjuntos algebraicos afines. Primero, notemos que gracias a la magnifica identidad

$$T^3 \cdot \frac{1}{T^2} = T$$

ambas álgebras $k[T^2, T^3]$ y $k[T]$ tienen el mismo cuerpo de fracciones $k(T)$: el cuerpo de funciones racionales en una variable T.

Recordemos que un dominio de integridad A es **integralmente cerrado** si en su cuerpo de fracciones $K := \operatorname{Frac} A$, si un elemento $x \in K$ satisface una ecuación polinomial mónica

$$x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0 = 0$$

con $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, entonces $x \in A$.

El anillo $k[T]$ es integralmente cerrado, pero $k[T^2, T^3]$ no lo es: por ejemplo, T^3/T^2 es un elemento en su cuerpo de fracciones que satisface una ecuación mónica con coeficientes en $k[T^2, T^3]$:

$$(T^3/T^2)^2 - T^2 = 0. \qquad \blacktriangle$$

17.8. Proposición. *Si k un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces el funtor $V \rightsquigarrow k[V]$ es esencialmente sobreyectivo.*

Demostración. Sea A una k-álgebra afín; es decir, $A = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ para algún ideal $\mathfrak{a}$. Puesto que A es un anillo reducido, se tiene $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. Podemos considerar $V := V(\mathfrak{a})$, y luego el teorema de los ceros nos dice que

$$k[V] := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V(\mathfrak{a})) = k[X_1, \ldots, X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}} = k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} \cong A. \qquad \blacksquare$$

17.9. Corolario. *Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, existe una equivalencia de categorías*

$$k\text{-}\mathbf{ConjAf}^{\mathrm{op}} \simeq k\text{-}\mathbf{ÁlgAf}.$$

El punto de vista moderno

Como acabamos de ver, un análisis de las soluciones de ecuaciones polinomiales sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k nos lleva naturalmente a las k-álgebras afines. Esta algebraización es un buen logro, y usando este punto de vista, se puede desarrollar mucha teoría.

Sin embargo, a veces nos interesan cuerpos k que no son algebraicamente cerrados, o casos en los que k se reemplaza por un anillo conmutativo arbitrario. También en muchos problemas es útil variar k. No existe ningún cuerpo que puede ser encajado en todos los cuerpos, así que, por ejemplo, un conjunto algebraico sobre $\mathbb{C}$ y un conjunto algebraico sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$ viven en dos mundos diferentes. Es algo lamentable: a veces la misma ecuación, por ejemplo

$$Y^2 = X^3 - X + 1$$

puede ser considerada sobre cualquier cuerpo.

Una solución extrema de todos de estos problemas es reemplazar las k-álgebras afines con k fijo por los anillos conmutativos arbitrarios (posiblemente con nilpotentes). Esta idea fue sistemáticamente desarrollada por el matemático francés Alexander Grothendieck (1928–2014) con ayuda de su colaborador Jean Dieudonné (1906–1992) en el tratado “Éléments de géométrie algébrique” (1960–1967).

Las ideas de Grothendieck fueron revolucionarias en los años 50, pero ahora están universalmente reconocidas.

Como hemos visto, los conjuntos algebraicos afines sobre $k = \overline{k}$ son duales a las k-álgebras afines. Los objetos duales a los anillos conmutativos se llaman **esquemas afines**.

$$\begin{array}{ccc}
\text{geometría} & & \text{álgebra} \\
\left\{ \begin{array}{c} \text{conjuntos algebraicos afines sobre} \\ \text{un cuerpo algebraicamente cerrado } k \end{array} \right\} & \simeq & \{k\text{-álgebras afines}\}^\circ \\
\cap & & \cap \\
\{\text{esquemas afines}\} & \simeq & \{\text{anillos conmutativos}\}^\circ
\end{array}$$

En este sentido, se puede pensar en un esquema afín nada más como en un anillo conmutativo y morfismos entre esquemas afines como en homomorfismos de anillos en la dirección opuesta. Obviamente, la verdadera definición de esquemas afines es un poco más sofisticada. En general, un **esquema** es el resultado de pegamiento de esquemas afines.

A Algunos ejercicios

Iso-, epi-, mono-

Ejercicio 1. Demuestre que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ y F es un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$.

Ejercicio 2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

1) Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es un isomorfismo.

2) Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es un monomorfismo.

3) Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es un epimorfismo.

4) Si para $m\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.

5) Si para $f\colon X \to Y$, $e\colon Y \to Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

Ejercicio 3. Demuestre que en la categoría k-**Vect** los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

Lema de Yoneda

Ejercicio 4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda.

Ejercicio 5. Sea G un grupo. Consideremos G como una categoría. Note que un funtor $F\colon G \to$ **Set** corresponde a un G-conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G-equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

Ejercicio 6. Sea R un anillo.

a) Demuestre que el funtor olvidadizo R-**Alg** $\to$ **Set** es representable.

b) Supongamos que para cada R-álgebra A está especificada una aplicación entre conjuntos $\alpha_A\colon A \to A$ de tal manera que para todo homomorfismo de R-álgebras $\phi\colon A \to B$ se cumple $\phi \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\alpha_B"] & B \end{tikzcd}$$

Usando el lema de Yoneda, demuestre que existe un polinomio $f \in R[x]$ tal que para toda R-álgebra A se tiene

$$\alpha_A\colon a \mapsto f(a).$$

c) Demuestre lo mismo sin recurrir a Yoneda.

Límites y colímites

Ejercicio 7. Consideremos la categoría $\mathbf{Top}_*$ cuyos objetos (X, x_0) son espacios topológicos con un punto marcado $x_0 \in X$ y cuyos morfismos $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\mathbf{Top}_*$.

Ejercicio 8. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en la categoría **Cat** de categorías pequeñas.

Ejercicio 9. Para un grupo fijo G, consideremos la categoría G-**Set** cuyos objetos son G-conjuntos (conjuntos con acción de G) y cuyos morfismos $f\colon X \to Y$ son aplicaciones G-equivariantes (que satisfacen la condición $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ para cualesauiera $g \in G$ y $x \in X$). Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en G-**Set**.

Ejercicio 10. Para una categoría pequeña sea $\widehat{\mathscr{C}}$ la categoría de funtores $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Describa los objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\widehat{\mathscr{C}}$.

Ejercicio 11. Demuestre que los productos fibrados son funtoriales en el siguiente sentido: un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dl] \arrow[d] \\
X_2 \arrow[dr] & Z_1 \arrow[d] & Y_2 \arrow[dl] \\
& Z_2 &
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo canónico $X_1 \times_{Z_1} Y_1 \to X_2 \times_{Z_2} Y_2$.

Ejercicio 12. Demuestre que en la categoría k-**Vect** se tiene

$$\operatorname{eq}(f, g) = \ker(f - g) \quad \text{y} \quad \operatorname{coeq}(f, g) = \operatorname{coker}(f - g).$$

Ejercicio 13. Demuestre que los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Y \to Z$ es un isomorfismo, entonces $X \times_Z Y \to X$ es también un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 14. Demuestre que los productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\binom{\mathrm{id}}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{f}"'] & X \times Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\binom{f}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\mathrm{id}}"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

calculan el ecualizador de $f, g\colon X \to Y$. Formule y demuestre la propiedad dual para coecualizadores y coproductos fibrados.

Transformaciones naturales

Ejercicio 15. Sean $\mathscr{C},\mathscr{D},\mathscr{E}$ tres categorías. Sean F,G,H funtores $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ y sean I,J,K tres funtores $\mathscr{D}\to\mathscr{E}$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha\colon F\Rightarrow G,\quad \beta\colon G\Rightarrow H,\quad \sigma\colon I\Rightarrow J,\quad \tau\colon J\Rightarrow K.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\alpha\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\beta\Downarrow"] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J" description] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\tau\Downarrow"] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Demuestre que

$$(\tau\circ\sigma)*(\beta\circ\alpha)=(\tau*\beta)\circ(\sigma*\alpha),$$

donde $*$ denota el producto de Godement.

Ejercicio 16. Demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, bend left=60, "F_1"] \arrow[r, bend right=60, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=60, "F_2"] \arrow[r, bend right=60, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F_3"] \arrow[r, bend right=60, "G_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

se cumple

$$(\gamma*\beta)*\alpha=\gamma*(\beta*\alpha).$$

Ejercicio 17. Sea $\mathscr{I}$ una categoría pequeña. Consideremos el funtor

$$\begin{aligned}\Delta\colon \mathscr{C}&\to \operatorname{Fun}(\mathscr{I},\mathscr{C}),\\ X&\rightsquigarrow \Delta_X\end{aligned}$$

que a cada objeto $X\in\operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ asocia el funtor constante $\Delta_X\colon\mathscr{I}\to\mathscr{C}$ (tal que $\Delta_X(i)=X$ para cada $i\in\operatorname{Ob}(\mathscr{I})$). Demuestre que para todo funtor $F\colon\mathscr{I}\to\mathscr{C}$ hay biyecciones naturales

$$\operatorname{Nat}(\Delta_X,F)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,\lim_{\mathscr{I}}F),$$

$$\operatorname{Nat}(F,\Delta_X)\cong\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colim}_{\mathscr{I}}F,X).$$

Adjunciones

Ejercicio 18. Sea $\mathbf{Ring}_1$ la categoría de anillos con identidad donde los morfismos son los homomorfismos $f\colon R\to S$ que satisfacen $f(1_R)\to 1_S$ y $\mathbf{Ring}$ la categoría de anillos que no necesariamente tienen identidad.

Para un anillo R consideremos el conjunto $\widehat{R}:=\mathbb{Z}\times R$ con la multiplicación

$$(n_1,r_1)\cdot(n_2,r_2):=(n_1n_2,n_1r_1+n_2r_1+r_1r_2).$$

Note que es un anillo con identidad $(1,0)$. Demuestre que $R\rightsquigarrow\widehat{R}$ es un funtor $\mathbf{Ring}\to\mathbf{Ring}_1$ y es adjunto por la izquierda a la inclusión $\mathbf{Ring}_1\hookrightarrow\mathbf{Ring}$.

Ejercicio 19. Digamos que en una categoría $\mathscr{C}$ dos objetos X e Y están en la misma componente conexa si existe una cadena de morfismos de X a Y, que no necesariamente van en la misma dirección, por ejemplo

$$X \to \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \to \bullet \leftarrow Y$$

Para una categoría pequeña $\mathscr{C}$ sea $\pi_0(\mathscr{C})$ el conjunto de sus componentes conexas. Demuestre que π_0 es un funtor **Cat** → **Set**. Demuestre que es adjunto por la izquierda al funtor **Set** → **Cat** que a cada conjunto X asocia la categoría donde los objetos son los elementos de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

Ejercicio 20. Sean X e Y dos conjuntos. Consideremos 2^X y 2^Y como conjuntos parcialmente ordenados por la relación $\subseteq$, y en particular como categorías.

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación. Para $A \in 2^X$ definamos

$$\begin{aligned} f_*(A) &:= \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}, \\ \operatorname{im}(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\}, \end{aligned}$$

y para $B \in 2^Y$ definamos

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Demuestre que f_* e im son funtores $2^X \to 2^Y$ y f^{-1} es un funtor $2^Y \to 2^X$. Demuestre que

1) im es adjunto por la izquierda a f^{-1},

2) f^{-1} es adjunto por la izquierda a f_*.

¿Qué significa en este caso la preservación de objetos iniciales y coproductos (resp. objetos terminales y productos) por adjunto por la izquierda (resp. adjunto por la derecha)?

Equivalencias de categorías

Ejercicio 21. Demuestre que si $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{C}$ en un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{D}$.

Supongamos que existe una equivalencia de categorías $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$. Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Set** y **Set**$^{\mathrm{op}}$ no son equivalentes.

Referencias

[Bor1994a] Francis Borceux, *Handbook of categorical algebra. 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Basic category theory. MR1291599

[Bor1994b] ———, *Handbook of categorical algebra. 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories and structures. MR1313497

[Bor1994c] ———, *Handbook of categorical algebra. 3*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 52, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories of sheaves. MR1315049

[Kro2007] Ralf Krömer, *Tool and object*, Science Networks. Historical Studies, vol. 32, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007, A history and philosophy of category theory. MR2272843

[Lei2014] Tom Leinster, *Basic category theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 143, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. MR3307165
`http://arxiv.org/abs/1612.09375`

[Mar2009] Jean-Pierre Marquis, *From a geometrical point of view*, Logic, Epistemology, and the Unity of Science, vol. 14, Springer, Dordrecht, 2009, A study of the history and philosophy of category theory. MR2730089

[ML1998] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. MR1712872

[Rie2017] Emily Riehl, *Category theory in context*, Aurora: Dover Modern Math Originals, Dover Publications, 2017.
`http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context.pdf`