Ejercicios sobre categorías

Alexey Beshenov (cadadr@gmail.com)

Universidad de El Salvador. Ciclo impar 2018

Iso-, epi-, mono-

Ejercicio 1. Demuestre que si f es un isomorfismo en $\mathscr{C}$ y F es un funtor $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$, entonces $F(f)$ es un isomorfismo en $\mathscr{D}$.

Ejercicio 2. Demuestre que las composiciones de iso-, mono-, epimorfismos satisfacen las siguientes propiedades.

1) Si $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ son isomorfismos, entonces $g \circ f\colon X \to Z$ es un isomorfismo.
2) Si $m\colon X \rightarrowtail Y$ y $m'\colon Y \rightarrowtail Z$ son monomorfismos, entonces $m' \circ m\colon X \to Z$ es un monomorfismo.
3) Si $e\colon X \twoheadrightarrow Y$ y $e'\colon Y \twoheadrightarrow Z$ son epimorfismos, entonces $e' \circ e\colon X \to Z$ es un epimorfismo.
4) Si para $m\colon X \to Y$, $f\colon Y \to Z$ la composición $f \circ m$ es un monomorfismo, entonces m es un monomorfismo.
5) Si para $f\colon X \to Y$, $e\colon Y \to Z$ la composición $e \circ f$ es un epimorfismo, entonces e es un epimorfismo.

Ejercicio 3. Demuestre que en la categoría k-**Vect** los isomorfismos, monomorfismos, epimorfismos son las aplicaciones k-lineales biyectivas, inyectivas, sobreyectivas respectivamente.

Lema de Yoneda

Ejercicio 4. Demuestre con todos los detalles la versión covariante del lema de Yoneda.

Ejercicio 5. Sea G un grupo. Consideremos G como una categoría. Note que un funtor $F\colon G \to \mathbf{Set}$ corresponde a un G-conjunto y una transformación natural entre tales funtores es una aplicación G-equivariante. ¿Qué es un funtor representable en este caso? ¿Qué significa el encajamiento de Yoneda?

Ejercicio 6. Sea R un anillo.

a) Demuestre que el funtor olvidadizo R-**Alg** $\to$ **Set** es representable.
b) Supongamos que para cada R-álgebra A está especificada una aplicación entre conjuntos $\alpha_A\colon A \to A$ de tal manera que para todo homomorfismo de R-álgebras $\phi\colon A \to B$ se cumple $\phi \circ \alpha_A = \alpha_B \circ \phi$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\phi"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\alpha_B"] & B \end{tikzcd}$$

   Usando el lema de Yoneda, demuestre que existe un polinomio $f \in R[x]$ tal que para toda R-álgebra A se tiene
$$\alpha_A\colon a \mapsto f(a).$$

c) Demuestre lo mismo sin recurrir a Yoneda.

Límites y colímites

Ejercicio 7. Consideremos la categoría $\mathbf{Top}_*$ cuyos objetos (X, x_0) son espacios topológicos con un punto marcado $x_0 \in X$ y cuyos morfismos $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ son aplicaciones continuas $f\colon X \to Y$ tales que $f(x_0) = y_0$. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\mathbf{Top}_*$.

Ejercicio 8. Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en la categoría **Cat** de categorías pequeñas.

Ejercicio 9. Para un grupo fijo G, consideremos la categoría G-**Set** cuyos objetos son G-conjuntos (conjuntos con acción de G) y cuyos morfismos $f\colon X \to Y$ son aplicaciones G-equivariantes (que satisfacen la condición $f(g\cdot x) = g\cdot f(x)$ para cualesauiera $g \in G$ y $x \in X$). Describa objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en G-**Set**.

Ejercicio 10. Para una categoría pequeña sea $\widehat{\mathscr{C}}$ la categoría de funtores $F\colon \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Describa los objetos terminales e iniciales, productos y coproductos en $\widehat{\mathscr{C}}$.

Ejercicio 11. Demuestre que los productos fibrados son funtoriales en el siguiente sentido: un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d] \arrow[dr] & & Y_1 \arrow[dl] \arrow[d] \\
X_2 \arrow[dr] & Z_1 \arrow[d] & Y_2 \arrow[dl] \\
& Z_2 &
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo canónico $X_1 \times_{Z_1} Y_1 \to X_2 \times_{Z_2} Y_2$.

Ejercicio 12. Demuestre que en la categoría k-**Vect** se tiene

$$\mathrm{eq}(f,g) = \ker(f-g) \quad \text{y} \quad \mathrm{coeq}(f,g) = \mathrm{coker}(f-g).$$

Ejercicio 13. Demuestre que los productos fibrados preservan isomorfismos: si la flecha $Y \to Z$ es un isomorfismo, entonces $X \times_Z Y \to X$ es también un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & Y \arrow[d, "\cong"] \\
X \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 14. Demuestre que los productos fibrados

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\binom{\mathrm{id}}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{f}"'] & X \times Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "e'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & X \arrow[d, "\binom{f}{g}"] \\
X \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}}{\mathrm{id}}"'] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

calculan el ecualizador de $f, g\colon X \to Y$. Formule y demuestre la propiedad dual para coecualizadores y coproductos fibrados.

Transformaciones naturales

Ejercicio 15. Sean $\mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}$ tres categorías. Sean F, G, H funtores $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$ y sean I, J, K tres funtores $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$. Consideremos transformaciones naturales

$$\alpha\colon F \Rightarrow G, \quad \beta\colon G \Rightarrow H, \quad \sigma\colon I \Rightarrow J, \quad \tau\colon J \Rightarrow K.$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=H}] \arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"'] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60, "I"{name=I}] \arrow[r, "J"{name=J}] \arrow[r, bend right=60, "K"'{name=K}] \arrow[from=I, to=J, Rightarrow, "\sigma"'] \arrow[from=J, to=K, Rightarrow, "\tau"'] & \mathscr{E}
\end{tikzcd}$$

Demuestre que

$$(\tau \circ \sigma) * (\beta \circ \alpha) = (\tau * \beta) \circ (\sigma * \alpha),$$

donde $*$ denota el producto de Godement.

Ejercicio 16. Demuestre que el producto de Godement es asociativo: para un diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathscr{A} \arrow[r, bend left=50, "F_1"{name=F1}] \arrow[r, bend right=50, "G_1"'{name=G1}] \arrow[from=F1, to=G1, Rightarrow, "\alpha"] & \mathscr{B} \arrow[r, bend left=50, "F_2"{name=F2}] \arrow[r, bend right=50, "G_2"'{name=G2}] \arrow[from=F2, to=G2, Rightarrow, "\beta"] & \mathscr{C} \arrow[r, bend left=50, "F_3"{name=F3}] \arrow[r, bend right=50, "G_3"'{name=G3}] \arrow[from=F3, to=G3, Rightarrow, "\gamma"] & \mathscr{D}
\end{tikzcd}$$

se cumple

$$(\gamma * \beta) * \alpha = \gamma * (\beta * \alpha).$$

Ejercicio 17. Sea $\mathscr{I}$ una categoría pequeña. Consideremos el funtor

$$\begin{aligned} \Delta\colon \mathscr{C} &\to \operatorname{Fun}(\mathscr{I}, \mathscr{C}), \\ X &\rightsquigarrow \Delta_X \end{aligned}$$

que a cada objeto $X \in \operatorname{Ob}(\mathscr{C})$ asocia el funtor constante $\Delta_X\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ (tal que $\Delta_X(i) = X$ para cada $i \in \operatorname{Ob}(\mathscr{I})$). Demuestre que para todo funtor $F\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ hay biyecciones naturales

$$\operatorname{Nat}(\Delta_X, F) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X, \lim_{\mathscr{I}} F),$$

$$\operatorname{Nat}(F, \Delta_X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(\operatorname{colím}_{\mathscr{I}} F, X).$$

Adjunciones

Ejercicio 18. Sea $\mathbf{Ring}_1$ la categoría de anillos con identidad donde los morfismos son los homomorfismos $f\colon R \to S$ que satisfacen $f(1_R) \to 1_S$ y $\mathbf{Ring}$ la categoría de anillos que no necesariamente tienen identidad.

Para un anillo R consideremos el conjunto $\widehat{R} := \mathbb{Z} \times R$ con la multiplicación

$$(n_1, r_1) \cdot (n_2, r_2) := (n_1 n_2, n_1 r_1 + n_2 r_1 + r_1 r_2).$$

Note que es un anillo con identidad $(1,0)$. Demuestre que $R \rightsquigarrow \widehat{R}$ es un funtor $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring}_1$ y es adjunto por la izquierda a la inclusión $\mathbf{Ring}_1 \hookrightarrow \mathbf{Ring}$.

Ejercicio 19. Digamos que en una categoría $\mathscr{C}$ dos objetos X e Y están en la misma componente conexa si existe una cadena de morfismos de X a Y, que no necesariamente van en la misma dirección, por ejemplo

$$X \to \bullet \to \bullet \leftarrow \bullet \to \bullet \to \bullet \leftarrow Y$$

Para una categoría pequeña $\mathscr{C}$ sea $\pi_0(\mathscr{C})$ el conjunto de sus componentes conexas. Demuestre que π_0 es un funtor **Cat** → **Set**. Demuestre que es adjunto por la izquierda al funtor **Set** → **Cat** que a cada conjunto X asocia la categoría donde los objetos son los elementos de X y los únicos morfismos son los morfismos identidad.

Ejercicio 20. Sean X e Y dos conjuntos. Consideremos 2^X y 2^Y como conjuntos parcialmente ordenados por la relación $\subseteq$, y en particular como categorías.

Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación. Para $A \in 2^X$ definamos

$$\begin{aligned} f_*(A) &:= \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}, \\ \operatorname{im}(A) &:= \{f(x) \mid x \in A\}, \end{aligned}$$

y para $B \in 2^Y$ definamos

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Demuestre que f_* e im son funtores $2^X \to 2^Y$ y f^{-1} es un funtor $2^Y \to 2^X$. Demuestre que

1) im es adjunto por la izquierda a f^{-1},

2) f^{-1} es adjunto por la izquierda a f_*.

¿Qué significa en este caso la preservación de objetos iniciales y coproductos (resp. objetos terminales y productos) por adjunto por la izquierda (resp. adjunto por la derecha)?

Equivalencias de categorías

Ejercicio 21. Demuestre que si $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{C}$ en un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{D}$.

Supongamos que existe una equivalencia de categorías $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$. Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Set** y $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ no son equivalentes.

Equivalencias de categorías

Ejercicio 22. Demuestre que si $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ es una equivalencia de categorías, entonces F envía un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{C}$ en un objeto terminal (resp. inicial) de $\mathscr{D}$.

Supongamos que existe una equivalencia de categorías $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$. Note que en este caso para cada conjunto X tendríamos

$$X \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{*\}, X) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(F(X), \emptyset).$$

Concluya que las categorías **Set** y $\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ no son equivalentes.